МБОУ СОШ с.Посёлки имени Героя Советского Союза И.Ф.Кузьмичёва
Кузнецкого района Пензенской области.

«Центр тяжести Архимеда»

Номинация «Математика»

Работу выполнила:
ученица 10 класса Заглядина Арина

Руководитель: учитель математики Купыра Н.А.
высшей квалификационной категории

Пенза 2023- 2024 учебный год.

Содержание:

Введение

Решая геометрические задачи, думаем, все, однажды задавались вопросом, нельзя ли одну и ту же задачу решить разными способами. В математической литературе можно встретить интересный метод, позволяющий быстрее и проще доказывать известные теоремы и решать некоторые задачи. В его основе лежит понятие центра масс или барицентра. Основоположником этого метода был великий древнегреческий мыслитель Архимед. Еще в III в до н. э., он обнаружил возможность доказывать новые математические факты с помощью свойств центра масс. В частности, этим способом Архимед доказал теорему о том, что три медианы треугольника пересекаются в одной точке. Ее способ доказательства отличается от варианта, который рассматривается в школьном курсе геометрии, и мы тоже докажем эту теорему, используя барицентрический метод. Кроме того, интересна возможность применения этого метода к решению задач.

Актуальность:

знание разных методов решения задач необходимо, а барицентрический метод как раз таковым и является.

Предмет исследования: барицентрический метод, задачи и теоремы, к которым можно применить этот метод, центроиды различных моделей треугольников.

Гипотеза: метод позволяет более рационально решать олимпиадные и экзаменационные задачи.

Цель работы: исследовать возможность применения барицентрического метода при решении геометрических задач.

Задачи:

1. Изучение основных теорем и принципов использования метода масс.
2. Изучение центроидов треугольника.
3. Применение полученных результатов для решения задач разного уровня сложности.

Введение понятия центра масс

Понятие о центре тяжести впервые изучено примерно 2200 лет назад греческим Архимедом, величайшим математиком древности. С тех пор понятие стало одним из важнейших в механике, а также позволило сравнительно просто решать некоторые геометрические геометром задачи. Именно приложение к геометрии мы и будем рассматривать. Для этого нужно ввести некоторые понятия и определения.

Под материальной точкой понимают точку, снабженную массой. Для наглядности можно себе физически представить материальную точку в виде маленького тяжелого шарика, размерами которого можно пренебречь. Если в точке A помещена масса m, то образующую материальную точку будем обозначать так: mA. Массу m иногда называют «нагрузкой точки A». Заметим, что в математических приложениях число m можно считать не только положительным (как в механическом понимании массы), но и отрицательным.

Чтобы получить физическую картину понятия центра масс, рассмотрим два небольших шарика с массой m_1 и m_2, соединенных жестким «невесомым стержнем». На этом стрежне имеется такая замечательная точка O, что если подвесить всю систему в этой точке, то она будет в равновесии. Эта точка O и есть центр масс или барицентр двух рассматриваемых материальных точек с массами m_1 и m_2. Та же картина наблюдается и для большего числа материальных точек.

Рассмотрим в пространстве несколько очень маленьких шариков, имеющих какие-то массы, и соединим их друг с другом жесткими, но практически невесомыми стержнями. Эту конструкцию будем называть системой материальных точек. Из физики известно, что для любой такой системы найдется точка Z пространства, обладающая одним поразительным свойством. А именно: если мы расположим всю систему произвольным образом в пространстве, а затем подвесим ее за нитку в точке Z, то вся система останется в равновесии. Эту точку называют центром масс (или центром тяжести) системы материальных точек, (или барицентром) системы материальных точек.

При применении этого понятия к решению задач используются следующие **свойства** центра масс.

1) **Существование и единственность**

Всякая система, состоящая из конечного числа материальных точек, имеет центр масс и притомединственный.

2) **Правило рычага**

Центр масс двух материальных точек расположен на отрезке, соединяющем эти точки; его положение определяется правилом архимедова рычага: произведение массы материальной точки на расстояние от нее до центра масс одинаково для обеих точек, т.е. $m_1d_1=m_2d_2$, где m_1 и m_2 – массы материальных точек, а d_1, d_2 – соответствующие плечи.

3) **Однородность**

Если в системе, состоящей из конечного числа материальных точек, отметить несколько материальных точек и массы всех отмеченных точек перенести в их центр масс, то от этого положение центра масс всей системы не изменится.

4) **Правило группировки**

Если систему материальных точек с центром масс в точке Z разбить на несколько непересекающихся подсистем, нагрузить центр масс каждой подсистемы суммарной массой соответствующей подсистемы, а затем рассмотреть систему из образования, таким образом, материальных точек, то центр масс этой подсистемы совпадет с точкой Z.

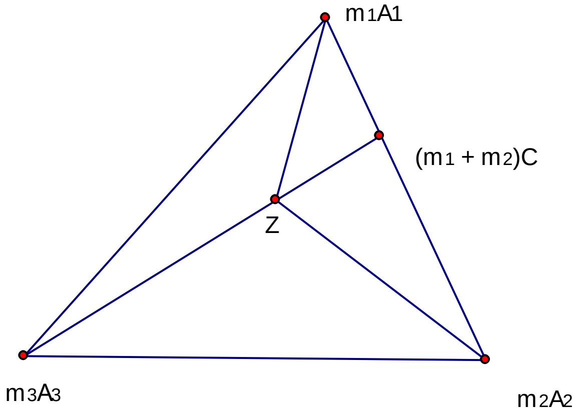
Чтобы выяснить, как может выглядеть математическое определение центра масс (или барицентра), проведем предварительное эвристическое рассмотрение.

Даны две материальные точки m_1A_1 и m_2A_2, и пусть т. Z –их центр масс. Равенство $m_1d_1=m_2d_2$ можно записать в виде $m_1ZA_1 = m_2ZA_2$. Учитывая, что векторы $\overrightarrow{ZA}_1$ и $\overrightarrow{ZA}_2$ имеют противоположное направление, получаем отсюда $m_1ZA_1 = -m_2ZA_2$, т.е

$$m_1\overrightarrow{ZA}_1 + m_2\overrightarrow{ZA}_2 = 0. \quad (1)$$

Пусть теперь даны три материальные точки m_1A_1, m_2A_2 и m_3A_3, то свойства (1–3) будут выполняться, если

$(m_1+m_2)\overrightarrow{ZC} + m_3\overrightarrow{ZA}_3 = 0$, где C – центр масс материальных точек m_1A_1, m_2A_2.



$(m_1+m_2)\overrightarrow{ZC} = m_1\overrightarrow{ZC} + m_2\overrightarrow{ZC} = m_1(\overrightarrow{ZA}_1 - \overrightarrow{CA}_1) + m_2(\overrightarrow{ZA}_2 - \overrightarrow{CA}_2) = m_1\overrightarrow{ZA}_1 - m_1\overrightarrow{CA}_1 + m_2\overrightarrow{ZA}_2 - m_2\overrightarrow{CA}_2 = m_1\overrightarrow{ZA}_1 + m_2\overrightarrow{ZA}_2 - (m_1\overrightarrow{CA}_1 + m_2\overrightarrow{CA}_2) = m_1\overrightarrow{ZA}_1 + m_2\overrightarrow{ZA}_2$.

Тогда $m_1\overrightarrow{ZA}_1 + m_2\overrightarrow{ZA}_2 + m_3\overrightarrow{ZA}_3 = 0$. (2)

Итак, в соответствии с приведенным эвристическим разбором можно дать следующее определение:

Центром масс (или барицентром) системы материальных точек

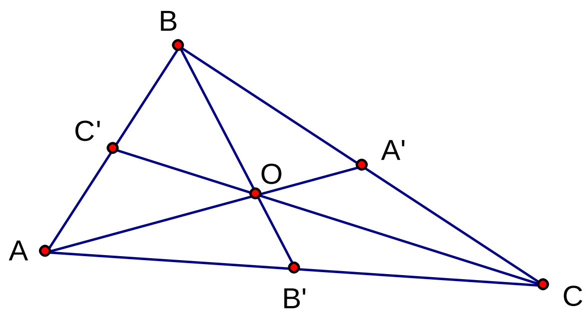
$m_1A_1, m_2A_2, \ldots, m_nA_n$

называется точка Z, для которой имеет место равенство

$m_1\overrightarrow{ZA}_1 + m_2\overrightarrow{ZA}_2 + \ldots + m_n\overrightarrow{ZA}_n = 0$. (3)

Теперь можно рассмотреть предложенное Архимедом доказательство теоремы о медианах треугольника. На этом примере видно, насколько мощное средство для решения и доказательства задач представляют собой свойства центра масс.

Три медианы треугольника имеют общую точку, и каждая из медиан делится этой точкой в отношении 2:1, считая от вершины.



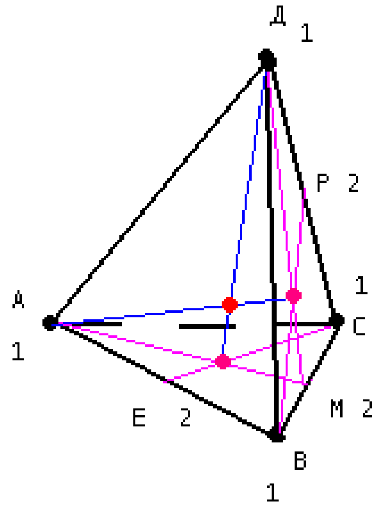
Дано: ΔABC, AA’, BB’, CC’ – медианы

Доказать: т. О – точка пересечения медиан

$\frac{AO}{OA'} = \frac{BO}{OB'} = \frac{CO}{OC'} = \frac{2}{1}$.

Решение.

Загрузим вершины А, В и С равными массами. Получающаяся система трех материальных точек 1А, 1В и 1С имеет однозначно определенный центр масс О. Положение центра масс не изменится, если массы материальных точек 1В и 1С мы перенесем в их центр масс, т.е. в точку А'. Тогда О окажется центром масс лишь двух

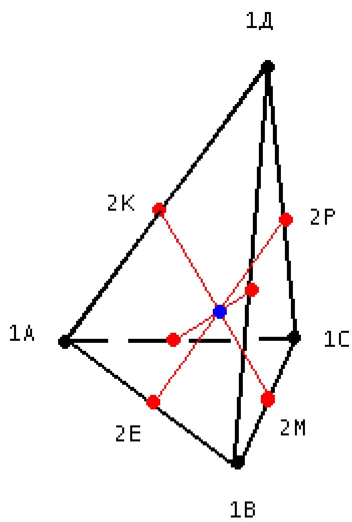


материальных точек 2А' и 1А. Значит О $\in$АА'. Аналогично убедимся, что О $\in$ВВ' и О $\in$ СС'. Таким образом, все три медианы имеют общую точку О. И тогда, по правилу рычага $2\overrightarrow{OA'} = 1\overrightarrow{OA}$, т.е. $\frac{OA}{OA'} = \frac{2}{1}$.

Найдём центроиды граней АВС и ВСД. Каждая из этих точек будет загружена массами, равными 3. Найдём центр масс медиан тетраэдра. Каждая медиана будет делиться в отношении 3/1, начиная от вершины.

Так как любая система материальных точек имеет единственный центр масс, то делаем вывод, что медианы тетраэдра пересекаются в одной, общей точке и делятся ею в отношении 3:1, считая от вершины. Что и требовалось доказать.

Рассмотрим опять тетраэдр DABC



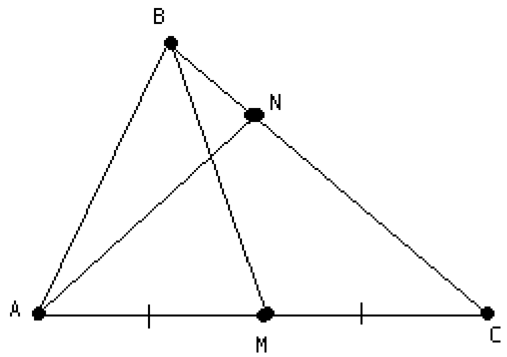
По правилу рычага и группировки, центр масс отрезка АВ находится в точке Е с суммарной массой 2.Аналогично для отрезков ВС и АС найдём их центры масс они также будут загружены массами, равными 2. Центры масс отрезков ДА, ДВ и ДС также будут находиться в серединах этих рёбер и загрузятся суммарными массами, равными 2. Значит центр масс всей системы (центроид тетраэдра) лежит в середине отрезка, соединяющего середины противоположных ребер тетраэдра. Такие отрезки называются бимедианами тетраэдра.

Мы доказали еще одну теорему: Бимедианы тетраэдра проходят черезегоцентроид, причем делятся им пополам.

В данном случае, геометрия масс не только помогла эту теорему доказать, но, что гораздо более существенно, помогла нам ее увидеть, то есть обнаружить и сформулировать.

Решение задач методом масс

Рассмотрим задачу.

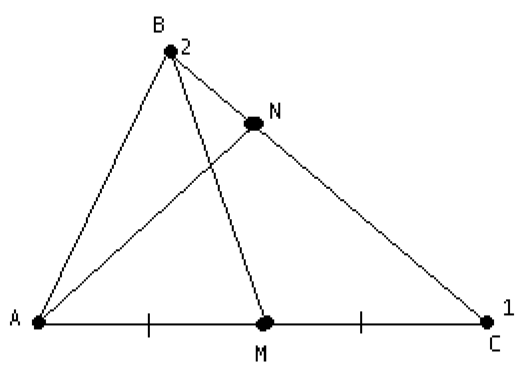


Задача 1. Пусть дан треугольник ABC. BM – медиана, AN делит сторону BC в отношении 1/ 2 от вершины B. AN пересекает BM в точке O. Найти отношение BO/OM. (Или в каком отношении точка O делит отрезок BM?)

Решение:

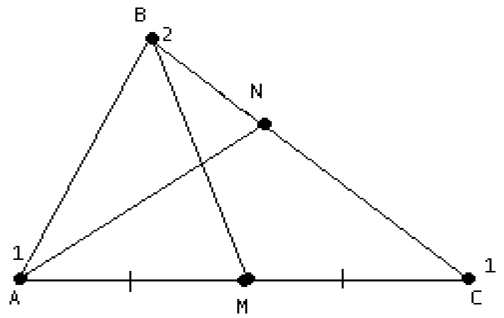
Решим эту задачу с помощью барицентрического метода. Мы сами можем выбирать какими массами загрузить точки A, B И C. Выберем эти массы так, чтобы центром масс треугольника ABC была именно точка O, которая находится на пересечении отрезков BM и AN. Как это сделать? Эта задача аналогична задаче о медианах. Мы сначала докажем, что при расставленных нами массах центр масс будет лежать на отрезке AN, затем докажем, что он же будет лежать и на отрезке BM. Если некоторая точка лежит на двух отрезках сразу, то она является их точкой пересечения. После этого мы и найдём искомое отношение.

Как же поставить массы в точки A, B и C? С одной стороны нам надо, чтобы центр масс лежал на отрезке AN, для этого нам нужно поставить такие массы в точки B и C, чтобы точка N была центром масс отрезка BC. Но, так как мы знаем, что N делит отрезок в отношении ½ от вершины B (по условию), то массы должны быть обратно пропорциональны, то есть относиться как 2/1, причём в точке B должна быть большая масса, так как BN – это меньшее расстояние.



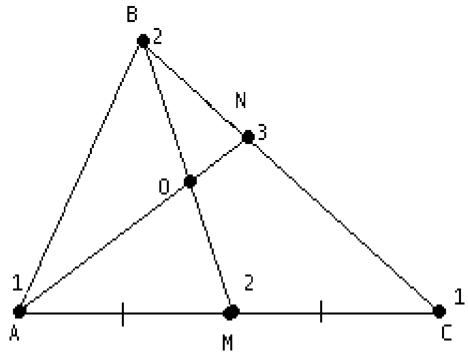
Итак, поставим в точку В массу 2, а в точку С массу 1.

Тогда, чтобы у точек А и С центром масс была точка М, а нам нужно, чтобы центр масс треугольника лежал также и на отрезке ВМ, нам необходимо, чтобы А и С были с одинаковыми массами, (так как ВМ по условию медиана и тогда АМ = МС). Но в точке С уже расположена масса 1, тогда и в точке А должна быть тоже масса 1. Итак, массы расставлены:

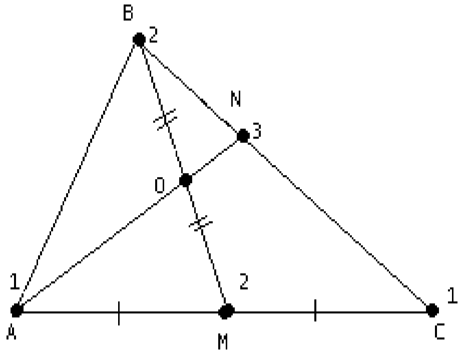


1—А,

1—С, 2—В.



Заметим, что центром масс точек В и С будет точка N с массой 3, следовательно центр масс треугольника лежит на отрезке AN. С другой стороны, если центром масс точек А и С является точка М с массой 2, и центр масс всего треугольника лежит на отрезке ВМ. А раз он лежит на ВМ и на AN, то центр масс лежит в точке пересечения отрезков ВМ и AN.

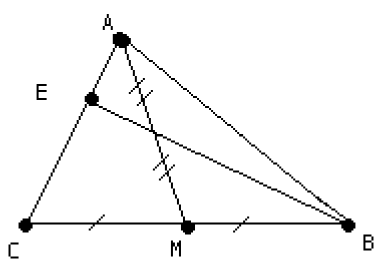


То есть точка О является центром масс треугольника АВС.

Итак, точка О лежит на отрезке ВМ и в точке В—2в точке М—2, а если массы одинаковы, то центр масс делит отрезок пополам, то есть ВО = ОМ, то есть ВО/ОМ = 1/1.

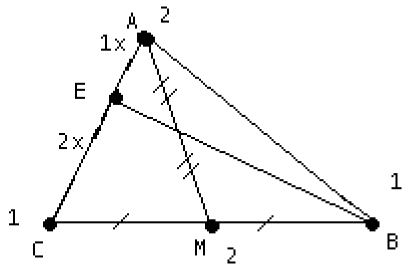
Ответ: ВО/ ОМ = 1/1.

Задача 2. В треугольнике АВС проведена медиана АМ, точка Р её середина. Прямая ВР пересекает сторону АС в точке Е. Найдите, в каком отношении точка Е делит АС.



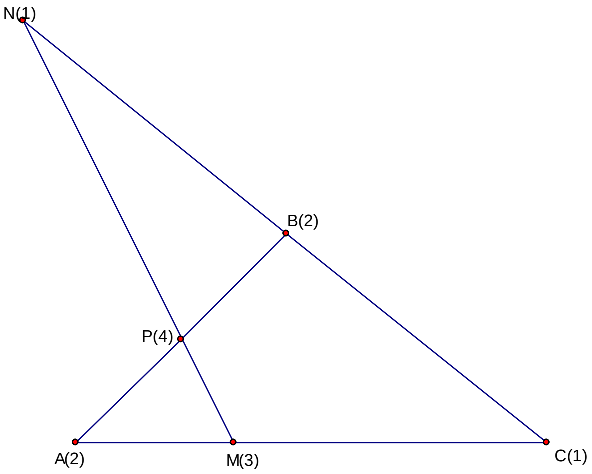
Решение

Загрузим точку В массой 1, но АМ – медиана, тогда СМ=МВ и следовательно mB=mC=1. Переместим массы из точек В и С в центр масс отрезка ВС точку М. Тогда mM=2. Так как mM=2, а Р по условию середина, то mA=mB=2. Рассмотрим сторону AC:mA=2, mC=1, тогда mA/mC=2/1. Поэтому AE/EC=1/2.



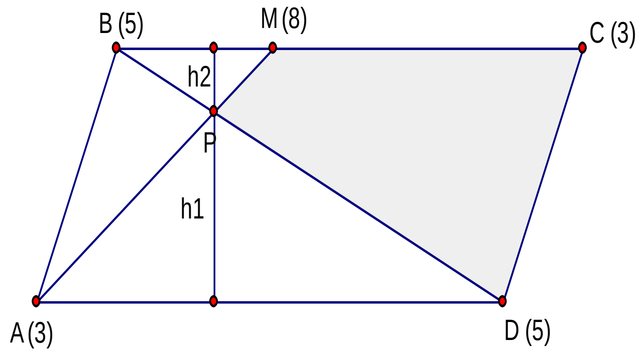
Ответ: Е делит отрезок АС в отношении 1 к 2, начиная от вершины А.

Задача 3.На стороне АС треугольника АВС взята точка М, так что АМ = $\frac{1}{3}$АС, а на продолжении стороны СВ т. N, так что BN = CB. MN пересекает АВ в точке Р. В каком отношении делит эта точка сторону АВ и отрезок NM?



ОтветNP:PM = 3:1, AP:PB=1:1.

Применим теперь метод масс не к треугольнику, а к четырёхугольнику, и попробуем решить соответствующую задачу.



Задача 4. .Площадь параллелограмма ABCD равна 1 м^2. Точка М делит сторону ВС в отношении 3:5 (считая от т. В). Прямые АМ и DB пересекаются в точке Р. Вычислите площадь четырехугольника CMPD.

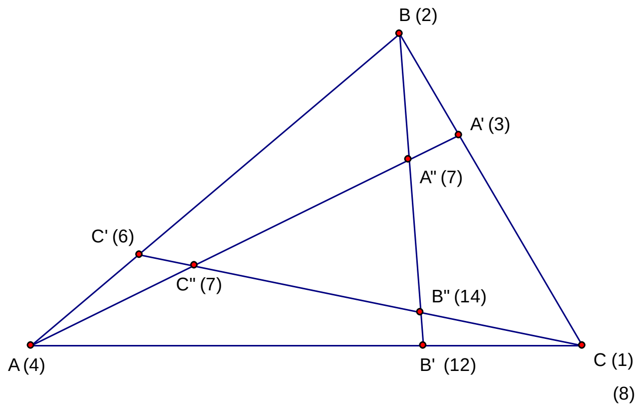
$\Delta BPM \sim \Delta DPA \Rightarrow h_1:h_2 = AP:PM$

AP:PM = 8:3; $h_2 = \frac{3}{11}h$;

$S_{\Delta ABD} = \frac{1}{2}м^2$; $S_{\Delta ABD} = \frac{1}{2}AD*h$

$S_{\triangle BMP} = \frac{1}{2} * \frac{3}{8} AD * \frac{3}{11} h = \frac{9}{88} * \frac{1}{2} AD * h = \frac{9}{176}$ м^2;

$S_{PMCD} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{9}{176} = \frac{79}{176}$ м^2.



Задача 5. На сторонах треугольника ABC взяты такие точки A', B', C', что $\overrightarrow{AC'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CB'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$. При пересечении отрезков AA', BB', CC'образовалсятреугольникA"B"C". Найдите, в каком отношении делятся отрезки AA', BB', CC' точками A", B", C".

Так как, 3AC = AB, то 2BA' = 1A'C $\Rightarrow$ 2B; 1C; 3A'

AC':C'B = 1:2 $\Rightarrow$ 4A; 6C'

AB':B'C = 2:1 $\Rightarrow$ 8C; 12B

Тогда: $\frac{AC''}{C''A'} = \frac{3}{4}$; $\frac{C'C''}{C''C} = \frac{1}{6}$; $\frac{C'B''}{B''C} = \frac{8}{6}$; $\frac{BB''}{B''B'} = \frac{12}{2}$.

Рассматривая решения этих задач, можно убедиться, что метод с использованием центра масс позволяет решить задачи, которые ранее казались неразрешимыми.

Задача 6.В основании четырехугольной пирамиды SABCD с вершиной S лежит параллелограмм. Точки P, Q, R расположены на ребрах AS, BS,CS соответственно, причем AP:SP=1:1, BQ:SQ=1:2, CR:SR=2:1. Известно, что плоскость, проходящая через точки P, Q, R пересекает ребро SDв точке T. Найдите DT :ST.

Решение:

PQRT - сечение пирамиды плоскостью (RQP).

1) Рассмотрим треугольник ASC. OZ:SZ=3:2
2) Рассмотрим треугольник DSB так, чтобы центр масс попал снова в Z. DT:ST=x:1;

   По правилу рычага $(\frac{1}{2}+x)\cdot SZ = 2\cdot OZ$, $\frac{SZ}{OZ} = \frac{2}{\frac{1}{2}+x} = \frac{2}{3}$, x=5/2

   Ответ: DT:ST=5:2.

Применение в химии

Химические системы – растворы, сплавы, химические соединения, а также смеси, состоящие из нескольких химических веществ, в некоторых отношениях аналогичны материальным точкам.

Для конкретности будем рассматривать трехкомпонентные смеси или соединения (составленные из трех веществ, элементов или иных компонентов). Пусть, скажем, из трех веществ A, B, C составлена смесь с общей массой m, причем на каждую единицу массы этой смеси приходится $\mu 1$ единиц вещества A, $\mu 2$ единиц вещества B и $\mu 3$ единиц вещества C (так что $\mu 1 + \mu 2 + \mu 3 = 1$). Числа $\mu 1$, $\mu 2$, $\mu 3$, называются концентрациями компонентов A, B, C. Выберем на плоскости произвольный треугольник ABC (базисный треугольник) и сопоставим рассматриваемой смеси материальную точку mK следующим образом: в точку K с Б-координатами (μ_1; $\mu 2$; $\mu 3$,) помещается масса m всей рассматриваемой смеси. Таким способом каждой трехкомпонентной смеси сопоставляется материальная точка в ΔABC, причем смесям с различными составами (т.е. отличающимися концентрациями компонентов) сопоставляются материальные точки, по-разному расположенные в ΔABC. При этом каждая материальная точка mK, где K принадлежит ΔABC, характеризует вполне определенную смесь.

Пусть теперь имеются две смеси m_1K_1 и m_2K_2. Если их перемещать, то возникает новая смесь; масса этой новой смеси, очевидно, равна $m = m1 + m2$, а концентрациями веществ в получившейся смеси соответствует некоторая новая точка K в ΔABC. Естественно возникает вопрос, где же будет расположена эта новая точка K, т.е. какой материальной точкой mK будет характеризоваться эта новая смесь (называемая объединением смесей m1K1 и m2K2)? Имеет место следующее легко проверяемое утверждение:

Если две смеси характеризуются материальными точками m1K1 и m2K2, то объединение этих смесей характеризуется материальной точкой mK, которая является суммой этих двух материальных точек, т.е. $m = m1 + m2$ и K – центр масс рассматриваемых двух материальных точек: $mK = m1K1 + m2K2$.

Аналогичное утверждение верно и применительно к смеси, возникающей при перемешивании любого числа смесей, составленных из трех заданных компонентов. Иначе говоря, если смесь возникла при смешивании n смесей, составленных из одних и тех же трех компонентов A, B, C и характеризуемых материальными точками m1K1, m2K2, …, mnKn, где $m = m1 + m2 + \dots mn$.

Это предложение позволяет сводить разнообразные задачи, в которых речь идет о смесях, к задачам о нахождении центров масс системы материальных точек.

В качестве базисного треугольника, используемого для изображения трехкомпонентных смесей в виде материальных точек, часто берут правильный треугольник. Понятно, что для этой же цели пригоден треугольник произвольной формы. Такого рода треугольные диаграммы находят важные и разнообразные приложения в физико-химическом анализе.

Аналогичным образом можно для изображения четырехкомпонентных смесей использовать материальные точки в заданном тетраэдре, а для изображения многокомпонентных смесей аналогичную роль выполняют симплексы в многомерных пространствах. Для двухкомпонентных смесей эту роль играет отрезок.

Задача 1. Имеется два вида серебряного припоя. Первый содержит 20% Ag, 50% Cu, 30%Zn, а второй – 45% Ag, 30% Cu, 25% Zn. Из 15 кг припоя первого вида и 10 кг припоя второго вида получен сплав. Определим процентный состав этого сплава.

*Решение.*Рассмотрим на плоскости треугольник ABC. Вершины A, B, C сопоставим соответственно: чистому серебру (Ag), чистой смеси (Cu), чистому цинку (Zn). Тогда первый сплав изобразится в виде точки P с Б-координатами (0,2; 0,5; 0,3), а второй – в виде точки Q (0,45; 0,3; 0,25) (см. приложение. Рис. 7). Задача сводится к нахождению центра масс Z системы двух материальных точек 15P и 10Q. По правилу рычага имеем 15|ZP| = 10|ZQ|, и потому |ZP| = 0,4|PQ|. Найдя теперь точку Z на чертеже, легко графически найти состав соответствующего ей сплава. К тому же результату можно прийти, вычислив Б-координаты точки Z:

$$z_1 = \frac{15\cdot 0{,}2 + 10\cdot 0{,}45}{15+10} = 0{,}3 \qquad z_2 = \frac{15\cdot 0{,}5 + 10\cdot 0{,}3}{25} = 0{,}42 \qquad z_3 = \frac{15\cdot 0{,}3 + 10\cdot 0{,}25}{25} = 0{,}28$$

Итак, в сплаве содержится: 30% Ag, 42% Cu, 28% Zn.

Задача 2. Решение. Имеется 600 г раствора йода в спирте, причем концентрация йода составляет 18%. Требуется получить 10%-ный раствор йода в спирте. Определим, сколько следует долить чистого спирта.Решение.Рассмотрим отрезок AB длины 1 и сопоставим чистому спирту A, чистому йоду – точку B (см. приложение. Рис. 8). Тогда данный раствор изобразится в виде материальной точки 600P, где P имеет относительно [AB] барицентрические координаты μ_1 = 0,82; μ_2 = 0,18, т.е. |AP| = 0,18. Требуемый раствор изобразится в виде материальной точки $(600 + x)Q$, где x – искомое количество спирта в граммах, а Q – центра масс двух материальных точек xA и $600P$. Поусловию точка Q должна иметь Б – координаты $\mu_1 = 0,9$; $\mu_2 = 0,1$, т.е. $|AQ| = 0,1$. По правилу рычага имеем: $x|AQ| = 600|QP|$, т.е. $0,1x = 600*800$, откуда $x = 480$ (г).

Подведём итог

Где же применяется центр масс в геометрии? Если в задаче нужно найти некоторое отношение, то эту задачу часто можно решить с помощью центра масс. Для этого мы расставляем массы в вершинах нашей фигуры. Это может быть треугольник или четырёхугольник, причём массы мы можем расставить любые, но сделать это нужно так, чтобы центром масс была какая-то данная в условии задачи точка. Обычно такой точкой является точка пересечения каких-либо отрезков внутри фигуры. А дальше с помощью центра масс мы находим нужное нам отношение.

Заключение

Мы рассмотрели оригинальный способ доказательства теоремы, о пересечении медиан треугольника, основанный на применении свойств центра масс системы материальных точек. Были рассмотрены готовые решения задач, которые позволили более глубоко понять материал. Так же в работе приведены задачи, решенные нами самостоятельно, что свидетельствует об усвоении полученных знаний и приобретении умения применять их на практике при решении задач из ОГЭ под номером 24-26 и задач из ЕГЭ под номером 14,16.

Сущность барицентрического подхода состоит в том, что наше внимание концентрируется на определенных точках – центрах масс систем материальных точек, связанных с рассматриваемой геометрической задачей. Искусство применения барицентрического метода заключается в том, чтобы осуществить такой выбор точек и помещаемых в эти точки масс, при которых задача легко и красиво решается. Таким образом, выдвинутая нами гипотеза подтвердилась. Барицентрический метод действительно облегчает решение, казалось бы, неразрешимых геометрических задач.

Литература

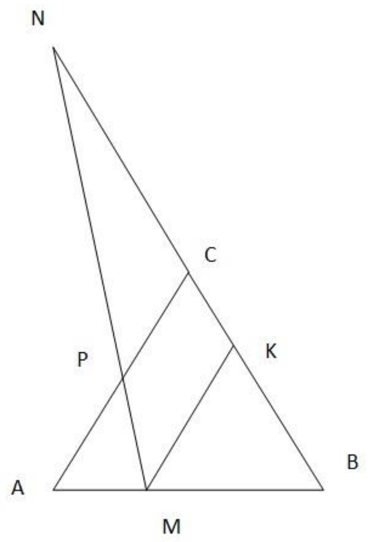
1. Л.С. Атанасян,В. Ф. Бутузов, С.Б.Кадомцев и др. Геометрия. Дополнительные главы к учебнику 8 класса: учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики. М.: ВИТА-Пресс, 2000, -205с.
2. А. Д. Александров, А. Л.Вернер, В, И. Рыжик. Геометрия для 8-9 классов:учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики. М.: Просвещение,1989.
3. М.И.Мельникова Центр масс, методическое пособие, Иркутск 2005.
4. М.Б. Балк. Геометрические приложения понятия о центре тяжести. – М.: Физматлит, 1959.
5. В.В.Прасолов Задачи по планиметрии. Ч. II. – М.: Наука, 2006.
6. В.А. Шеховцов. Олимпиадные задания по математике. 9-11 классы: решение олимпиадных задач повышенной сложности. – Волгоград: Учитель, 2009.

Приложение

Для сравнения здесь приведена задача 3, которая решается традиционным способом.

Задача 3. На стороне AC треугольника ABC взята точка M, так что AM = $\frac{1}{3}$AC, а на продолжении стороны CB т. N, так что BN = CB. MN пересекает AB в точке P. В каком отношении делит эта точка сторону AB и отрезок NM?

Решение:



Пусть AM =x, MB=2x. Треугольники ABC и MKB подобны. Коэффициентподобия равен $\frac{2}{3}$. Значит $\frac{MK}{AC}$ = $\frac{2}{3}$, т.е. MK=$\frac{2}{3}$AC. Треугольники MNK и PNC подобны. Коэффициент подобия равен $\frac{4}{3}$. MK =$\frac{4}{3}$PC. Значит, $\frac{2}{3}$AC =$\frac{4}{3}$PC, 2AC=4PC, $\frac{PC}{AC}=\frac{1}{2}$. Итак, AP: PC=1:1.

$\frac{NM}{NP}=\frac{4}{1}$. Следовательно, $\frac{NP}{PM}=\frac{3}{1}$.

Ответ: NP:PM=3:1, AP:PC=1:1.

Подборка задач из ОГЭ и ЕГЭ, решаемых с помощью метода масс

Задача 1. (ОГЭ 2016)

Площадь треугольника ABC равна 120, точка D лежит на отрезке BC так, что BD:CD = 1: 2, биссектриса BK пересекает прямую AD в точке L. Найдите площадь четырехугольника KLDC, если AK:KC = 3:1.

Задача 2. (ОГЭ 2012).

В треугольнике ABC точка K лежит на стороне BC так, что BK:KC =1:2, биссектриса CM пересекается с прямой AK в точке L, при этом AM:MB=1:4. Найдите площадь треугольника ABC, если площадь четырехугольника MBKL равна 52.

Задача 3.(ОГЭ 2016)

В параллелограмме ABCD отмечена точка M-середина отрезка BC. Отрезок AM пересекается с диагональю BD в точке K. Докажите, что BK:BD=1:3.

Задача 4.(ОГЭ 2016)

Точка A_1 симметрична вершине A треугольника ABC относительно середины стороны BC, точка B_1 симметрична вершине B относительно середины стороны AC. Докажите, что точки A_1, B_1 и C лежат на одной прямой.

Задача 5. (ОГЭ 2016)

Площадь треугольника ABC равна 40, биссектриса AD пересекает медиану BK в точке E, при этом BD:CD = 3:2. Найдите площадь четырехугольника EDCK.

Задача 6. (ОГЭ 2015)

Биссектриса угла B треугольника ABC делит медиану, проведенную из вершины C, в отношении 7:2, считая от вершины C. В каком отношении, считая от вершины A, эта биссектриса делит медиану, проведенную из вершины A?

Задача 7. (ЕГЭ 2017 задача №14)

В правильной шестиугольной пирамиде *SABCDEF* с вершиной *S* боковое ребро вдвое больше стороны основания.
а) Докажите, что плоскость, проходящая через середины рёбер *SA* и *SD* и вершину *C*, делит апофему грани *ASB* в отношении 2:1, считая от вершины *S*.
б) Найдите отношение, в котором плоскость, проходящая через середины рёбер *SA* и *SD* и вершину *C*, делит ребро *SF*, считая от вершины *S*.

Рецензия

на исследовательскую работу «Центр тяжести Архимеда»

ученицы 10 класса Заглядиной Арины

МБОУ СОШ с.Посёлки имени Героя Советского Союза И.Ф.Кузьмичёва

Кузнецкого района Пензенской области.

Работа посвящена обобщению знаний и демонстрации ярких применений математики в окружающем мире. Актуальность проблемы ученица видит в том, что математика не существует отдельно от жизни, она помогает рационально использовать математические соотношения, которые рассматриваются применительно к конкретным ситуациям, распространённым в практической деятельности.

Исследовательская работа имеет логически правильную структуру. Она состоит из введения, теоретической и практической части, заключения, а так же использованной при написании литературы. Работа грамотно оформлена.

Работа содержит большое количество доказательного материала, которое позволяет сделать правильные выводы и подтвердить основную гипотезу исследования возможность применение метода Архимеда при решении не только геометрических, но и химических задач.

Проект является исследовательским, поэтому способствует развитию познавательного интереса, аналитических способностей, различных способов восприятия и обработки информации. В работе поставлена цель, определены задачи, решая которые ученица показывает свою заинтересованность в данной проблеме.

Ариной проделана серьёзная работа по решению задач, применяемых в практической деятельности, которые позволяют более рационально решать олимпиадные и экзаменационные задачи. Работа выполнена на достаточно высоком уровне, содержит ряд выводов, представляющих практический интерес. Работа полностью соответствует требованию качества, может быть дидактическим материалом для внеклассной работы с учащимися 10-11 классов: факультативы, кружки и внеурочных занятий.

Таким образом, можно заключить, что поставленные цель и задачи успешно раскрыты. Исследовательская работа заслуживает высокой оценки.

6.12.2023 г.

Руководитель исследовательской работы : ___________ Купыра Н.А.

учитель математики МБОУ СОШ с.Посёлки