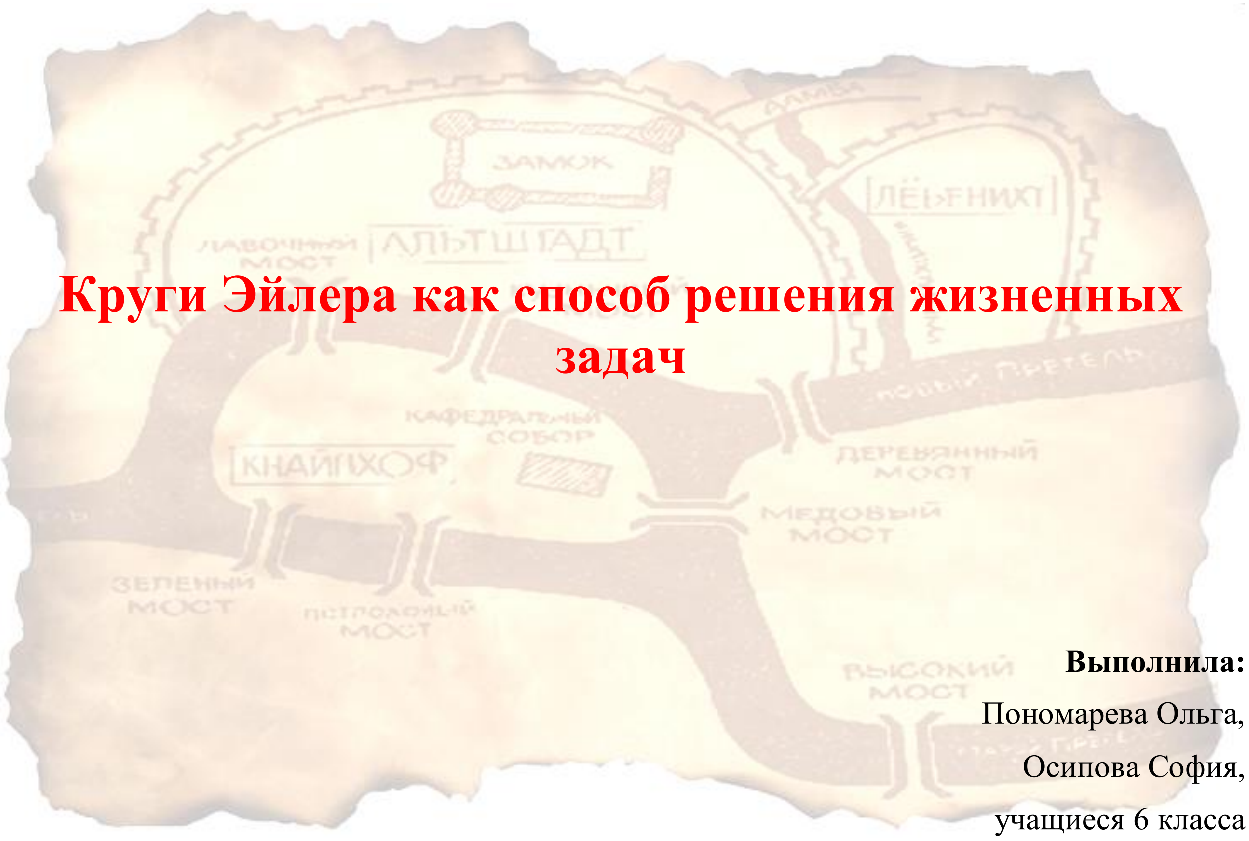
Региональный конкурс исследовательских и проектных работ школьников «Высший пилотаж - Пенза» 2023

«Математика»



Круги Эйлера как способ решения жизненных задач

Выполнила:
Пономарева Ольга,
Осипова София,
учащиеся 6 класса
МБОУ СОШ № 36 г. Пензы

Руководитель:
Паньженская Анна Викторовна,
учитель математики
МБОУ СОШ № 36 г. Пензы

Пенза, 2023

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

На уроках математики учитель непременно знакомит нас, учеников с историей развития математических понятий, символов, идей, методов. Но из-за нехватки учебного времени ему не всегда удается рассказать о жизни великих творцов математики – интенсивной, целенаправленной, поучительной, хотя подчас и драматичной. Раскрыть все стороны древнейшей и в то же время современной науки. Даже дошкольнику известно, математика может быть не только серьезной, но и занимательной.

Объект исследования: геометрия.

Предмет исследования: круги Эйлера.

Цель работы: научить решать нетрадиционные задачи, применяя геометрические схемы Эйлера.

Задача:

- познакомиться с методами решения нетрадиционных задач,
- познакомиться с кругами Эйлера,
- решить задачу: можно ли пройти по мостам через Суру, не проходя по одному мосту дважды,
- научиться применять правила и круги Эйлера при решении задач.

Актуальность работы: данное исследование поможет решать задачи занимательного характера, позволит применять методы и правила для решения нетрадиционных задач. Приобретенные сведения и знания способствуют повышению интеллектуального развития, помогают развивать умение наблюдать и анализировать.

Гипотеза: круги и мосты Эйлера широко применяются при решении некоторых задач, упрощают их решение.

Методы исследования: абстрагирования – это мысленное отвлечение от несущественных свойств, связей, отношений предметов; формализации – отображение объекта или явления в знаковой форме; анализа – познание при помощи расчленения или разложения предметов исследования на составные части, синтеза– соединение отдельных сторон предмета в единое целое, индукции – умозаключение от фактов к некоторой гипотезе (общему утверждению), дедукции – умозаключение, в котором вывод о некотором элементе множества делается на основании знания общих свойств всего множества. аналогии – метода, посредством которого достигается знание о предметах и явлениях на основании того, что они имеют сходство с другими.

1. Об Эйлер

Эйлер принадлежит к числу гениев, чьё творчество стало достоянием всего человечества. До сих пор школьники всех стран изучают тригонометрию и логарифмы в том виде, какой придал им Эйлер. Студенты проходят высшую математику под руководством, первыми образцами которых явились классические монографии Эйлера. Он был, прежде всего, математиком, но он знал, что почвой, на которой расцветает математика, является практическая деятельность. Он оставил важнейшие труды по самым различным отраслям математики, механики, физики, астрономии и по ряду прикладных наук. Трудно даже перечислить все отрасли, в которых трудился великий учёный. Леонард Эйлер за свою долгую жизнь (он родился в 1707 г., а умер в 1783 г.) написал более 850 научных работ. В одной из них и появились эти круги.

2. Способы решения задач с помощью кругов и мостов Эйлера

Круги Эйлера

Круги Эйлера — геометрическая схема, с помощью которой можно изобразить отношения между подмножествами. Используется в математике, логике, менеджменте и других прикладных направлениях. А впервые Эйлер их использовал в письмах к немецкой принцессе. Эйлер писал тогда, что «круги очень подходят для того, чтобы облегчить наши размышления». При решении целого ряда задач Леонард Эйлер использовал идею изображения множеств с помощью кругов, и они получили название «круги Эйлера». Позднее аналогичный прием использовал ученый Венн, и приёмы Венна назвали «диаграммы Венна».

Эйлер выделил шесть типов соотношений между понятиями, которые выразил в соответствующих схемах.

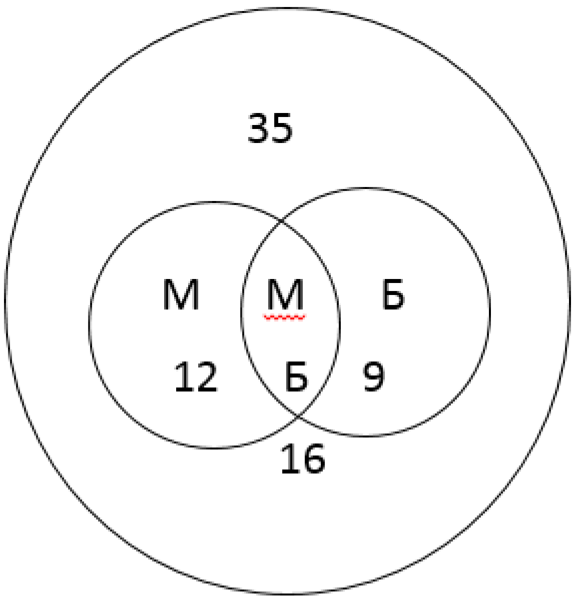
1. **Равнозначные**. Два одинаковых круга. Например, А.С.Пушкин = автор повести «Капитанская дочка».
2. **Пересекающиеся.** Часть одного круга частично совпадает с частью другого (человек может быть одновременно и футболистом, и поэтом).
3. **Подчиненные.** Один маленький круг внутри большого (корова относится к классу млекопитающих).
4. **Соподчиненные.** Несколько одинаковых по размеру маленьких кругов внутри большого (яблоко, груша, персик – фрукты).
5. **Противоречащие.** Разделенный пополам круг, каждая часть которого не имеет ничего общего с другой. Например, две конкурирующие между собой компании, производящие автомобили.
6. **Противоположные**. Две части круга, между которыми есть свободное пространство. В отличие от предыдущей группы, между ними нет конфликта (холодное и горячее).

В сложной логической задаче иногда может встречаться сразу несколько видов таких схем.

Строгого определения понятия множества не существует. Множество- совокупность элементов как единое целое (множество натуральных чисел, множество треугольников на плоскости). Множества, состоящие из конечного числа элементов, называют конечными, а остальные множества – бесконечными. Например, множество китов в океане конечно, а множество рациональных чисел бесконечно. Конечное множество может быть задано перечислением его элементов (множество учеников в данном классе задается их списком в классном журнале). Понятие подмножества в определении кругов Эйлера – это, например, во множестве учеников класса можно выделить множество ударников, которые входят во множество всех учеников (ударники – подмножество). Множество всех действительных чисел Эйлер изобразил с помощью этих кругов: N - множество натуральных чисел, Z – множество целых чисел, Q – множество рациональных чисел, R – множество всех действительных чисел.

«Пересчитайте математиков!»- первая задача, которая предлагается для решения. В классе 35 учеников, 12 занимаются в математическом кружке, 9 - в биологическом, а 16 ребят не посещают эти кружки. Сколько биологов увлекаются математикой? Легко заметить, что 19 ребят (35 - 16=19) посещают кружки, из них 10 человек посещают только математический кружок (19-9=10) и

2 биолога (12-10=2) увлекаются математикой. Оказывается, упростить решение этой задачи помогают так называемые круги Эйлера, с помощью которых можно изобразить множество элементов, обладающих определённым свойством. Количество учеников изобразим с помощью большого круга, а внутри поместим круги поменьше: очевидно, что в общей части кругов окажутся те самые биологи-математики, о которых спрашивается в задаче. Теперь посчитаем: Внутри большого круга 35 учеников, внутри кругов М и Б - 35-16=19 учеников, внутри круга М - 12 ребят, значит, в той части круга Б, которая не имеет ничего общего с кругом М, находится 19-12=7 учеников, следовательно, в МБ находится 2 ученика (9-7=2). Таким образом, 2 биолога увлекаются математикой.



Б- изображает любителей биологии

М-изображает

любителей математики

С помощью кругов Эйлера легко увидеть и другой способ решения задачи:

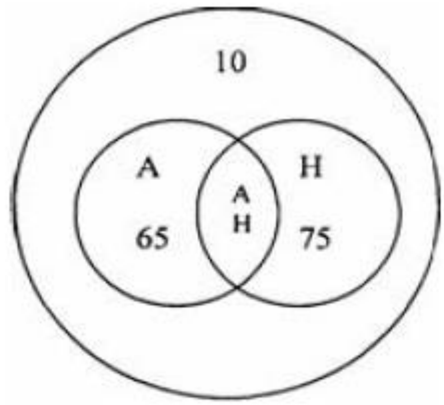
1)35-16=19(чел.);

2) 12+9=21 (чел.);

3) 21-19=2(чел.).

Задача 2. В туристической группе из 100 человек 75 человек знают немецкий язык, 65 человек-английский язык, а 10 человек - не знают ни немецкого, ни английского языка. Сколько туристов знают два языка?

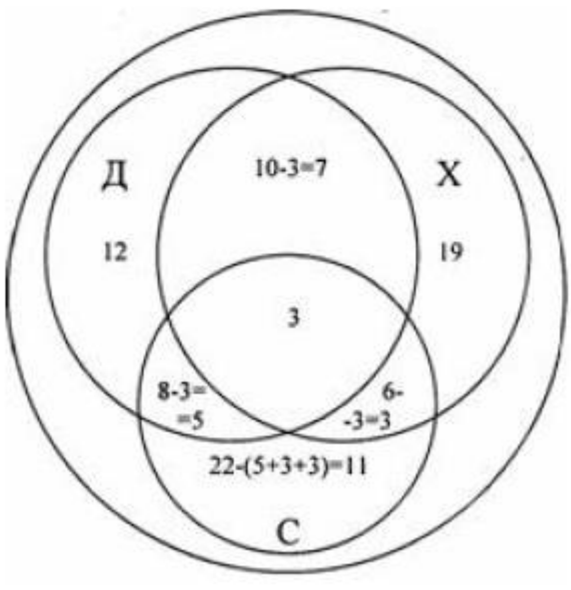
Решение. Изобразим условие задачи в виде кругов Эйлера. В большом круге, изображающем 100 туристов, поместим 2 меньших круга, изображающих знатоков английского и немецкого языков. Легко видеть, что 90 туристов (100-10) знают хотя бы один язык; 15 туристов (90-75) знают только английский язык, 65-15=50 – туристов знают оба языка.



Ответ: 50 туристов.

Задача 3. В трёх седьмых классах 70 ребят. Из них 27 занимаются в драмкружке, 32 поют в хоре, 22 увлекаются спортом. В драмкружке 10 ребят из хора, в хоре 6 спортсменов, в драмкружке 8 спортсменов; 3 спортсмена посещают и драмкружок и хор. Сколько ребят не поют в хоре, не увлекаются спортом и не занимаются в драмкружке? Сколько ребят заняты только спортом?

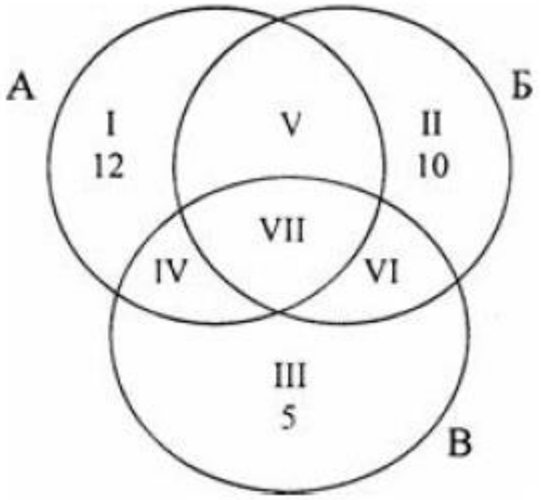
Решение.



Д - драмкружок; Х - хор; С - спорт. В круге Д 27 ребят, в круге Х - 32 человека, в круге С - 22 ученика. Те 10 ребят из драмкружка, которые поют в хоре, окажутся в общей части кругов Д и Х. Трое из них ещё и спортсмены, они окажутся в общей части всех трёх кругов. Остальные семеро спортом не увлекаются. Аналогично, 8-3=5 спортсменов, не поющих в хоре и 6-3=3, не посещающих драмкружок. Легко видеть, что 5+3+3=11 спортсменов посещают хор или драмкружок, 22-(5+3+3)=11 занимаются только спортом; 70-(11+12+19+7+3+3+5)=10 - не поют в хоре, не занимаются в драмкружке, не увлекаются спортом.

Ответ: 10 человек.

Задача 4. В областной спартакиаде участвует школьная команда из 20 человек, каждый из которых имеет юношеский спортивный разряд по одному или нескольким видам спорта: лёгкой атлетике, плаванию и гимнастике. Известно, что 12 из них имеют спортивные разряды по лёгкой атлетике, 10 – по гимнастике и 5 – по плаванию. Сколько учеников из этой команды имеют разряды по трём видам спорта, если по лёгкой атлетике и гимнастике - 4 человека, по плаванию и гимнастике -2человека?



Ответ; один человек.

Указание: А - круг, изображающий обладателей разрядов по лёгкой атлетике; Б - по гимнастике; В - по плаванию.

Выводы:

В результате работы над данной темой мы пришли к следующим выводам:

1) Все множества чисел связаны между собой так, что каждое следующее, более объемное, включает в себя предыдущее множество полностью;

2) Любое натуральное число является элементом любого следующего множества.

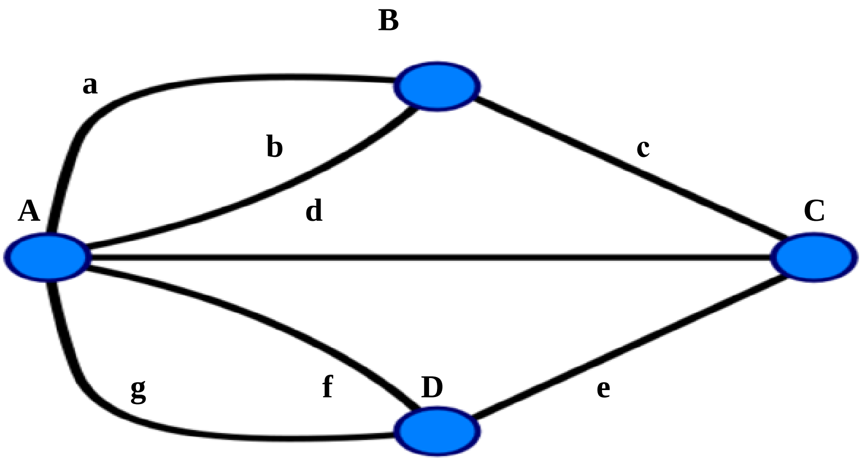
3) Применение кругов Эйлера (диаграмм Эйлера-Венна) позволяет легко решить задачи, которые обычным путем разрешимы лишь при составлении системы трех уравнений с тремя неизвестными.

Мосты Эйлера

Во время одного путешествия Эйлеру была предложена задача об острове, расположенном в городе Кенигсберге (ныне город Калининград) и окруженном рекой, через которую перекинуто семь мостов.

Задача Эйлера.

Река, огибающая остров делится на два рукава, через которые переброшено семь мостов. Можно ли, прогуливаясь по городу, пройти через каждый мост точно по одному разу? Эйлер придумал геометрическую модель к задаче.



На модели земельные участки, разъединенные рукавами реки, точки A, B, C, D- вершины (узлы), а мосты как бы вытянуты в линии a, b, c, d, e, f, g – ветви (или ребра), соединяющими два последовательных узла. Узел назовем четным, если в нем сходится четное число концов ветвей, и нечетным, если в нем сходится нечетное число концов ветвей. Образовавшаяся фигура называется сетью (или графом). ГРАФ - от греческого слова «графо» - пишу.

Теория графов – раздел конечной математики, для которого характерен геометрический подход к решению вопросов. Основным содержанием теории графов является изучение графов. Графы – фигуры (или схемы), состоящие из множества точек, называемых вершинами, и связывающих эти точки отрезков прямых и дуг, называемыми ребрами графа.

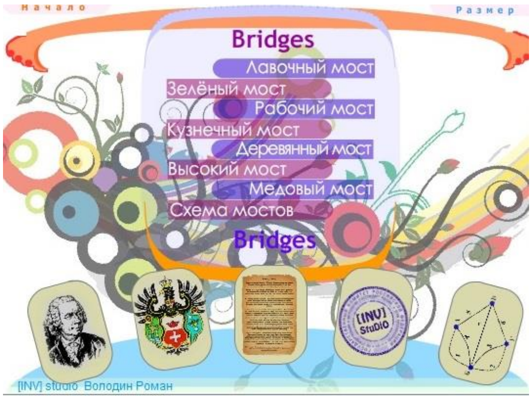
Графы имеют свойства. Если граф можно нарисовать одним росчерком, т, е, пройти его весь непрерывным движением, проходя по каждой ветви один и только один раз (одним маршрутом)- граф называется уникурсальным (или эйлеровым). Уникурсальный от латинского слова «unus» – один, «cursus» – путь. Если возможен обход всей сети одним маршрутом, то она называется уникурсальной сетью, а маршрут – уникурсальным обходом.

Условия существования уникурсального обхода, обоснованные Эйлером и названные им **правилами**, очень просты:

1.Сеть, не имеющая нечетных узлов, допускает замкнутый уникурсальный обход с началом в любой точке сети.

2.Сеть, имеющая два и только два нечетных узла, обходится уникурсально, если начать движение с одного нечетного узла и закончить его в другом.

3.Сеть, имеющая больше двух нечетных узлов, нельзя полностью обойти одним маршрутом – сеть не уникурсальна.



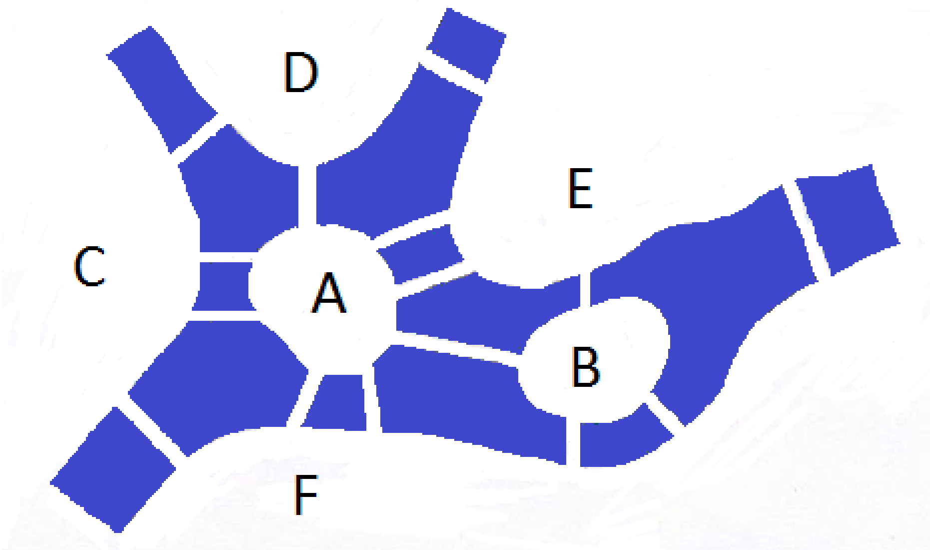
Решение задачи с 7 мостами Кенигсберга. Из геометрической модели мостов придуманной Эйлером видно, что сеть имеет 4 узла, в каждом сходится нечетное число ребер (линий) – все узлы нечетные. Следовательно, по правилу 3 сеть не уникурсальна. Требуемого маршрута прогулки по 7 мостам города Кенигсберга не существует.

Задача 2.

Достаточно было построить еще один мост через Преголю, например соединяющий участки B и D, и задача обхода одним маршрутом восьми мостов, каждого по одному разу, становится разрешимой, сеть становиться уникурсальной

Задача 3.

В некоторой местности через протоки переброшено 15 мостов. Можно ли обойти все мосты, пройдя по каждому из них только один раз?



Решить задачу можно и без схемы, зная, что участки A, B, C, D, E, F – узлы, а 15 мостов – ветви предполагаемой схемы. Подсчитаем, сколько мостов ведет на каждый из участков. На участок A – 8 мостов, на B – 4 моста, на C – 4 моста, на D – 3 моста, на E – 5 мостов, F – 6 мостов. На два участка D и E ведет нечетное число мостов. По второму правилу Эйлера сеть, имеющая два и только два нечетных узла, в данной задаче участки D и E, обходится уникурсально, если начать движение с одного нечетного узла и закончить его в другом. Все 15 мостов через протоки можно пройти одним маршрутом. По каждому мосту пройти один раз.

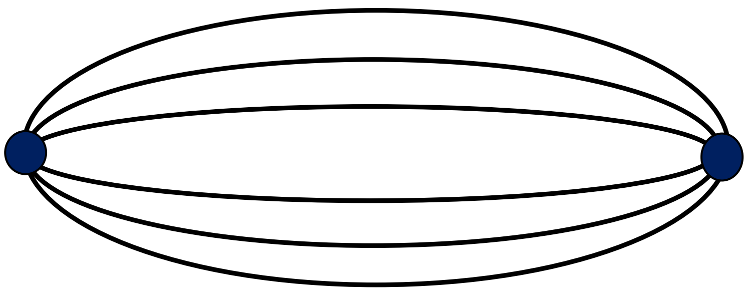
Задача о мостах через реку Сура

Задача: можно ли пройти в городе Пенза по мостам реки Суры, не перемещаясь по одному мосту дважды?!

Решение:

Перечисли мосты в городе Пенза. По течению они следуют в таком порядке: мост на Пензу III, ведущий с ул. Баумана на ул. Тухачевского (у «Катюши»); небольшой мостик на острове Пески; путепровод, ведущий с ул. Кирова на ул. Измайлова (в народе названный Леонидовским); подвесной мост Дружбы; Бакунинский мост; Сурский мост; мост и плотина в районе КПД.

Далее вновь помельчавшая река еще раз оказывается пересеченной трассой М5 на самом севере Пензы и течет по Бессоновскому району.



Т.о. мы видим, что сеть, не имеет нечетных узлов, допускает замкнутый уникурсальный обход с началом в любой точке сети, т.е. можно обойти все мосты не возвращаясь дважды к одному.

3. Применение кругов Эйлера в различных сферах жизни.

Метод Эйлера применяют для упрощения решения задач во многих областях: от математики до менеджмента. Он помогает находить ответы с помощью наглядных логических цепочек.

Круги Эйлера широко используются во многих упражнениях на развитие мышления и логики.

Сегодня круги Эйлера широко используют в своей работе:

- математики;
- экономисты;
- маркетологи;
- менеджеры и др.

Основное преимущество данного метода – его универсальность.

Соподчиненные круги Эйлера отлично подойдут для обучения по различным предметам.

Применение кругов Эйлера для обучения биологии

Круги Эйлера удобно применять при изучении новых биологических понятий в 5 класссе для улучшения результатов усвоения новых тех на начальных этапах изучения биологии.

Применение на уроках русского языка

Круги Эйлера используют при разных видах разбора предложения, чтобы найти общие и схожие черты в их строении. Например, при морфологическом разборе ученики сравнивают слова одной и той же части речи (или разных частей), которые имеют общие морфологические признаки. В этом случае графическая схема быстрее помогает детям научиться различать похожие лингвистические обороты.

Применение кругов Эйлера для профориентации

Круги Эйлера широко применяются во многих сферах, помогают справляться с нестандартными задачами. Например, определиться с будущей профессией или планами на выходные. Попробуйте и вы применить этот метод к решению своих повседневных вопросов!

Результат использования кругов Эйлера можно проследить на этом примере очень просто: обдумывая, какую профессию выбрать, вы можете либо долго рассуждать, пытаясь понять, что больше подойдет, а можете нарисовать аналогичную диаграмму, ответить на вопросы и сделать логический вывод

Заключение

Этими исследованиями Эйлер положил начало новой отрасли математической науки – топологии. Она изучает те топологические свойства геометрических фигур, которые могут быть описаны с помощью понятия непрерывности. Свойства фигур, не изменяющихся при любых деформациях, производимых без разрывов и склеиваний (точнее, при взаимно однозначных и непрерывных отображениях).

Современная топология находит ряд интересных и важных приложений в других разделах математики, в физике, например в электротехнике, в теории жидких кристаллов, в молекулярной биологии, в космогонии и т. д.

Эйлер принадлежит к числу гениев, чьё творчество стало достоянием всего человечества. До сих пор школьники всех стран изучают тригонометрию и логарифмы в том виде, какой придал им Эйлер. Студенты проходят высшую математику под руководством, первыми образцами которых явились классические монографии Эйлера. Он оставил важнейшие труды по самым различным отраслям математики, механики, физики, астрономии и по ряду прикладных наук.

Задачи для самостоятельного решения

Реши с помощью «Кругов Эйлера».

Задача 1.

Ученики нашего класса принимали участие в олимпиаде по биологии и русскому языку, часть – только по биологии, а часть в двух олимпиадах. По биологии принимало участие 85%, по русскому языку 75%. Сколько процентов учащихся участвовало в двух олимпиадах?

Задача 2.

В футбольной команде «Спартак» 30 игроков, среди них 18 нападающих. 11 полузащитников, 17 защитников и вратари. Известно, что трое могут быть нападающими и защитниками, 10 защитниками и полузащитниками, 6 нападающими и защитниками, а 1 и нападающим, и защитником, и полузащитником. Вратари не заменимы. Сколько в команде «Спартак» вратарей?

Задача 3.

В классе 38 человек. Из них 16 играют в баскетбол, 17 - в хоккей, 18 – в футбол. Увлекаются двумя видами спорта - баскетболом и хоккеем - четверо, баскетболом и футболом - трое, футболом и хоккеем - пятеро. Трое не увлекаются ни

баскетболом, ни хоккеем, ни футболом. Сколько ребят увлекается одновременно

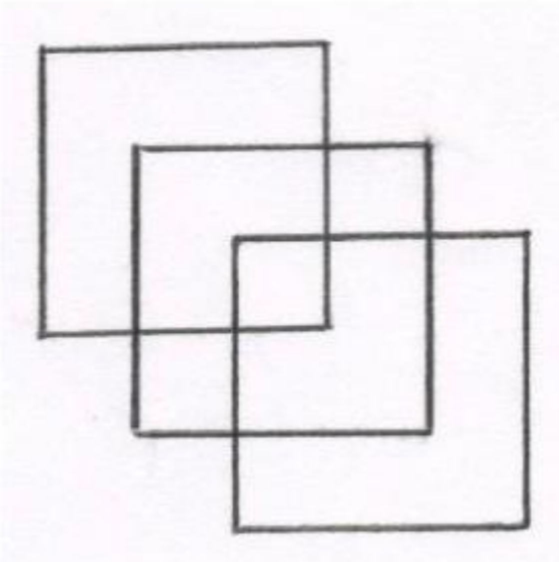
тремя видами спорта? Сколько ребят увлекается лишь одним из этих видов спор-

та?

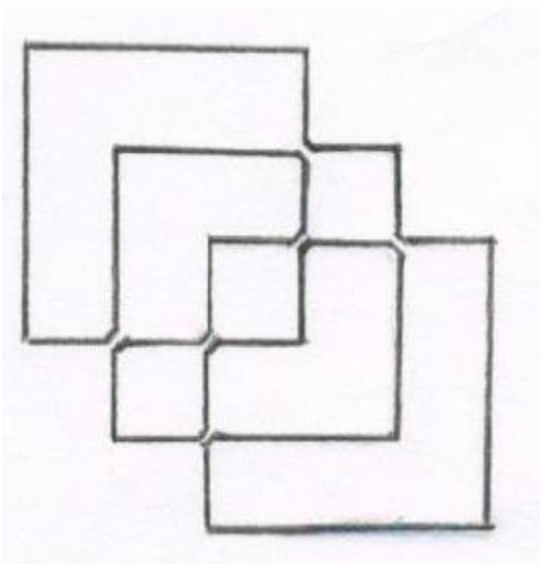
Реши с помощью правил уникурсального обхода Эйлера.

Задача 4.

Английский математик Л. Кэрролл (автор всемирно известной книги «Алиса в стране чудес») любил задавать своим маленьким друзьям головоломку на обход фигуры единым росчерком пера не проходя дважды ни одного участка контура.



Пересечение линий допускалось. Такая задача решается просто. Усложнение ее дополнительным требованием: при каждом переходе через узел (считая узлами и точки пересечения линий) направление обхода должно изменяться на 90 градусов. Начиная обход с любого узла, придется сделать 23 поворота



Литература

1. Савин А. П. Энциклопедический словарь юного математика. М., «Педагогика», 1989 г.

2. Кордемский Б. А. «Великие жизни в математике», М., Просвещение, 1995 г.

3. Учебник математики за 5 класс. Серия «МГУ- школе». С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин. М., 2011г.

4. Легенды истории математики. «Именем Эйлера». Математика, №6/2007

5. Сто великих имён в математике, физике и географии. О. А. Смирнова, Т. С. Майорова, И. В. Власова. Научный руководитель В. В. Словакин. Научно-популярное издание. Москва, филологическое общество «СЛОВО» АСТ, 1998 г.

6. Развитие идей Леонарда Эйлера и современная наука. Сборник статей. М., Наука, 1988 г. Сайт http://ru.wikipedia.org.

7. С. Н. Олехник Ю. В.Нестеренко М. К. Потапов Старинные занимательные задачи. Главная редакция физико-математической литературы. М., «Наука»,

РЕЦЕНЗИЯ

на исследовательскую работу по теме «Круги Эйлера как способ решения жизненных задач», выполненную ученицами 6 «А» класса МБОУ СОШ №36 города Пензы Пономаревой Ольги Степановна и Осиповой Софьи Денисовны.

В аннотации работы заявлено изучение и применение темы «Кругов и мостов Эйлера», что соответствует содержанию работы, ученицы провели исследование мостов города Пензы через реку Сура. Теория графов, которую начинают изучать ученицы – развивающаяся область дискретной математики. Методы теории графов завоевали признание не только математиков, но и инженеров, экономистов, психологов, лингвистов, биологов, химиков. Использование языка и методов теории графов часто ускоряет решение практических задач, упрощает расчеты, повышает эффективность научной, инженерной и конструкторской деятельности. А круги Эйлера используются при изучении множеств. Таким образом исследуемая тема имеет важное значение.

Реферативная часть работы выполнена на высоком уровне, поскольку учащиеся проанализировали большое количество интернет-сайтов по заданной тематике, литературу для дополнительного образования, провели анализ ресурсов. Провели самостоятельно исследование.

Оценка творческой части работы – высокая: ученицы полностью самостоятельно провели все исследования. Выводы исследования сделаны грамотно, на основе полного рассмотрения источников. Работа построена последовательно, логично. Работа оформлена в соответствии с требованиями к реферативной работе. Рекомендована к участию в научно- практической конференции школьников.

Заместитель директора по УВР,

учитель математики МБОУ СОШ №36 г Пензы И. И Любомирова

Подпись Любомировой И.И заверяю

Директор МБОУСОШ №36 г. Пензы Е. Г. Сафронова