Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение
средняя общеобразовательная школа №28 города Пензы
имени Василия Осиповича Ключевского

V открытый региональный конкурс
исследовательских и проектных работ школьников
«Высший пилотаж – Пенза» 2023

«ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ КРИВЫЕ - РОЗЫ ГРАНДИ И СПИРАЛИ»

Выполнил:
Горбачевский Егор,
обучающийся 11 «А» класса

Руководитель:
Бутусова Татьяна Валерьевна,
учитель математики

г. ПЕНЗА, 2023

СОДЕРЖАНИЕ

1. ВВЕДЕНИЕ

Математика - это наука, которая исследует величины, количественные отношения и пространственные формы, описывает процессы, происходящие в окружающем нас мире. Линии занимают особенное положение в математике – с помощью них можно создать наглядные модели многих процессов и проследить их течение во времени, или установить и исследовать функциональную зависимость между разными величинами, и многое другое.

Меня привлекли кривые, заданные в полярных координатах. Среди них можно назвать спираль Архимеда, логарифмическую спираль, Розы Гвидо Гранди. Сильнее других мое внимание привлекла математическая кривая, похожая на цветок - полярная роза или Роза Гвидо Гранди, и я в своей работе хочу исследовать многообразие форм «роз» Гвидо Гранди.

Цель исследования – изучить применение Роз Гранди и спиралей в повседневной жизни.

Объект исследования – Розы Гранди и спирали.

Предмет исследования – зависимость формы и очертаний лепестков, в зависимости от изменения формулы, что задаёт кривую Гранди.

Гипотеза исследования – существует связь между Розами Гранди, математикой и узорами в сегодняшнем мире.

Актуальность моей работы заключается в демонстрации и применении различных математических знаний в жизни. Абсолютно всё, что нас окружает – различается по форме и размерам. Интерес к какой-либо форме предмета может быть обусловлен как потребностью человека, так и красотой самой формы.

Задачи исследования:

1) Узнать, что такое Розы Гранди и спирали
2) Выяснить, какие виды Роз и спиралей существуют
3) Показать, как меняются кривые Гранди и спирали от различных значений параметров
4) Понять, как связаны Розы Гранди с математикой и их применение в жизни
5) Построить собственные Розы Гранди и спирали

Методы исследования:

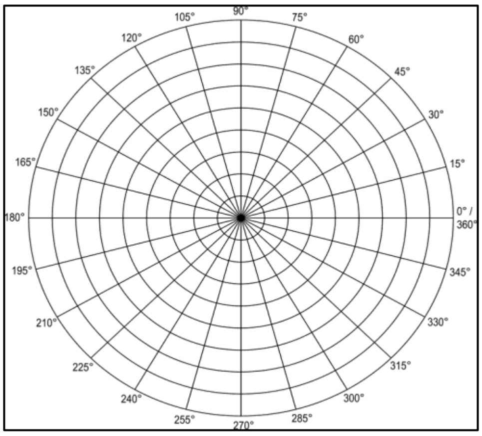
1) Теоретические – анализ, классификация, формализация, моделирование, обобщение, умозаключение.
2) Эмпирические – наблюдение, измерение, описание, сравнение.

2. ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

2.1 ИСТОРИЧЕСКАЯ СПРАВКА

В 18 веке итальянский математик Гвидо Гранди[1] (1671-1742) построил особые кривые с плавными начертаниями – по форме, размерам и закономерностям эти кривые напоминали цветы – а именно – розы. Семейство этих особых кривых было названо семейством Роз Гранди. Ключевая особенность таких роз в том, что их узоры определены не природой и случайностью, а математическими зависимостями. Все эти особые «цветы» Гвидо Гранди собрал в единую книгу – «Цветник роз». Кроме этого, он известен своей работой «Flores geometrici», которую представил в 1728 году – данная работа позволяет изучать кривые, которые имеют форму лепестков цветка.

2.2 ПОЛЯРНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ



Абсолютно все Розы и спирали, которые необходимо исследовать, задаются в полярной системе координат.

1) Число «r» (иногда «p») называют **полярным радиусом** точки или *первой полярной координатой*. Расстояние не может быть отрицательным, поэтому полярный радиус любой точки $r \geq 0$.

2) Число φ называют **полярным углом** данной точки или *второй полярной координатой*. Полярный угол стандартно изменяется в пределах $-\pi < \varphi \leq \pi$ (так называемые *главные значения угла*). Но вполне допустимо использовать диапазон $0 \leq \varphi < 2\pi$, а в определённых случаях и вовсе появляется прямая необходимость рассмотреть все значения угла от нуля до «плюс бесконечности».

Математические спирали[2] - плоские кривые, которые обычно обходят вокруг одной (или некоторых точек), приближаясь или удаляясь от нее/них.

Математические розы[3] – плоские кривые, напоминающие символическое изображение цветка.

---

[1] https://ru.wikipedia.org/wiki/Гранди,_Гвидо_(философ)
[2] https://ru.wikipedia.org/wiki/Спираль
[3] https://ru.wikipedia.org/wiki/Роза_(плоская_кривая)

2.3 ФОРМУЛЫ РОЗ ГРАНДИ

Существует несколько формул для построения Роз Гранди:

$$r = a \times \sin k \times \varphi$$

$$r = a \times \cos k \times \varphi$$

$$r = a \times \sin((\frac{c}{b}) \times \varphi)$$

$$r = n \times \sin(k \times a) + m$$

Где:

r – полярный радиус

k – количество лепестков в Розе; (при k – четное число, кол-во лепестков умножается на 2, → 2k; если k – дробное число, то лепестки будут перекрывать друг друга, кроме последней формулы, но об этом позже)

a – радиус лепестков Розы

φ/θ («фи» / «тета») – полярный угол[4]

В зависимости от изменения различных параметров (например, k), Розы Гранди будут меняться.

2.4 СПИРАЛИ И ИХ РАЗНОВИДНОСТИ

Спираль - плоские кривые, которые обычно обходят вокруг одной или нескольких точек, приближаясь, либо удаляясь от неё. Это толкование термина не является точно формализуемым определением. Если какая-то известная кривая содержит в названии слово «спираль», то к этому следует относиться как к исторически выработавшемуся названию.

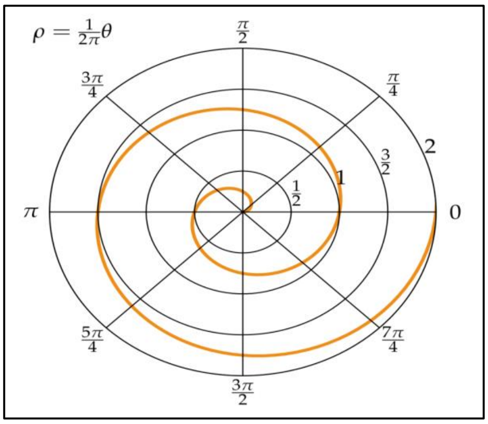
2.4.1 ПЛОСКИЕ (ДВУХМЕРНЫЕ) СПИРАЛИ:

1) Архимедова спираль

Архимедова спираль – это кривая, задаваемая уравнением:

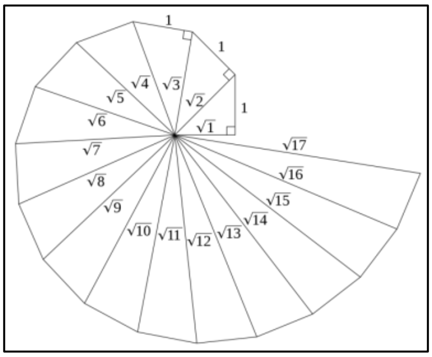
$r(\theta) = a + b(\theta)$

a и b — параметры, определяющие исходный радиус спирали и расстояние между витками, которое равно 2π*a.



[4] Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике [Справочник] , М., 1966 г.

2) Спираль Феодора

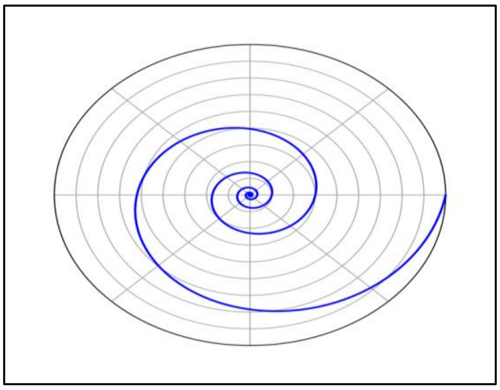


Спираль Феодора (спираль квадратного корня) - это спираль, состоящая из серии смежных прямоугольных треугольников, начиная с равнобедренного прямоугольного треугольника с длиной сторон, равных единице.

3) Логарифмическая спираль

Логарифмическая спираль (равноугольная спираль, растущая спираль) - это самоподобная спиральная кривая, которая зачастую появляется в природе.

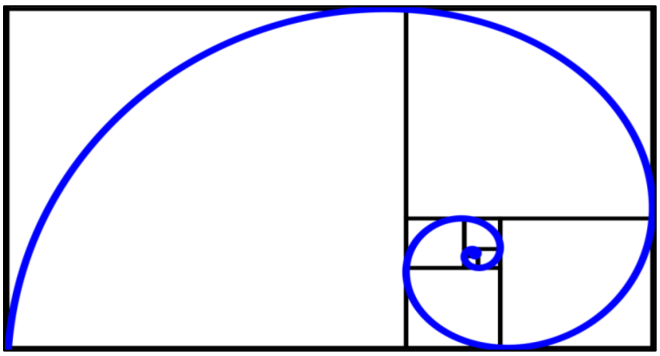
Строится по формуле: $r = \alpha^{\varphi}$



4) Спираль Фибоначчи

Золотая спираль (спираль Фибоначчи) — логарифмическая спираль, коэффициент роста которой равен φ^4, где φ — золотое сечение. Коэффициент роста логарифмической спирали показывает, во сколько раз изменился полярный радиус спирали при повороте на угол 360°.

Свое название эта спираль приобрела из-за связи с последовательностью вложенных друг в друга прямоугольников с отношением сторон, равным φ (фи), которые принято называть золотыми. Золотую спираль возможно как вписать в систему таких прямоугольников, так и описать вокруг нее. Популярность золотая спираль приобрела из-за того, что она известна с начала XVI века и применяется в искусстве.



Уравнение для золотой спирали в полярной системе координат то же самое, что и для других логарифмических спиралей, но со специальным значением коэффициента роста - φ^4.

$r = \alpha\varphi^{\pm\frac{2\theta}{\pi}}$, где

a — произвольная положительная вещественная константа,

$\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ – золотое сечение

2.4.2 ТРЁХМЕРНЫЕ СПИРАЛИ:

1) **Коническая спираль**

Коническая спираль (винтовая линия) – представляет собой траекторию точки, равномерно перемещающейся по образующей прямого кругового конуса и в то же время постоянно вращающейся вместе с образующейся вокруг оси. Горизонтальная проекция винтовой линии представляет собой *Спираль Архимеда.*

I. Цилиндрическая винтовая линия определяется параметрическими уравнениями вида:

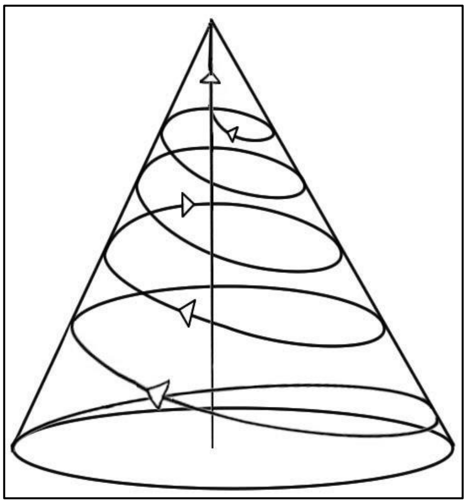
$x(t) = a \times \cos t$

$y(t) = a \times \sin t$

$z(t) = b \times t$

Проекция цилиндрической винтовой линии на плоскость (x, y) представляет собой *окружность*.

II. Коническая винтовая линия (также спирально-винтовая линия), определяется параметрическими уравнениями вида:



$x(t) = a \times t \times \cos t$

$y(t) = a \times t \times \sin t$

$z(t) = b \times t$

a, b – вещественные константы, не равные 0.

Проекция спирально-винтовой линии на плоскость (x, y) — *спираль Архимеда*.

2) **Сферическая спираль**

Сферическая спираль (локсодрома) — это кривая на сфере, пересекающая все меридианы под одним углом (не прямым).

Определяется следующими уравнениями:

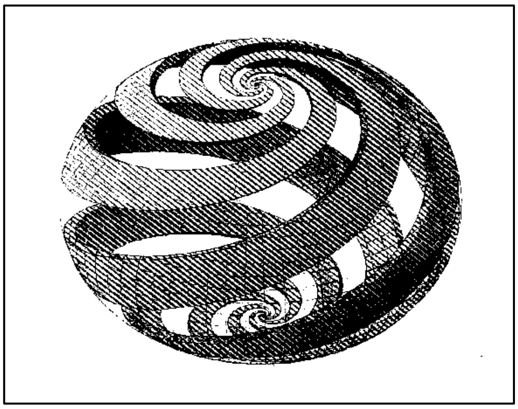
$x = r \times \sin\theta \times \cos\varphi$;

$y = r \times \sin\theta \times \sin\varphi$;

$z = r \times \cos\theta$.

При этом:

$0 \leq \theta \leq \pi$; r – радиус сферы[5]



2.5 *РОЗЫ ГРАНДИ И СПИРАЛИ В ПРИРОДЕ И В ЖИЗНИ*

В природе спираль выявляется в трех основных формах: застывшей (раковины улитки), расширяющейся (изображения спиральных галактик) или сжимающейся (в виде водоворота)

В окружающем нас мире огромное количество спиралей, например:

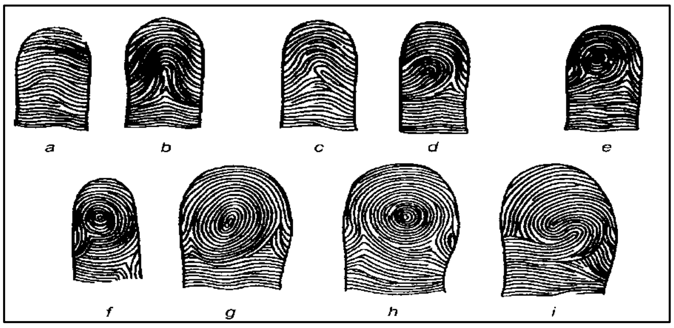
1) Раковина моллюсков – на большинстве моллюсков и улиток всегда можно увидеть спиралевидные закручивания.

2) Рога определённых животных – в основном к таким относятся парнокопытные животные с рогами на голове (горный козел, антилопа, разные виды быков, бизоны и многие другие).

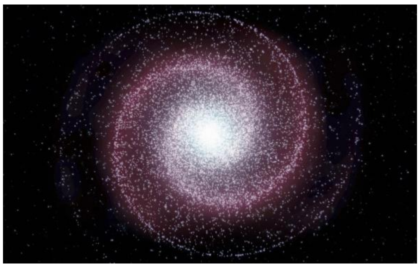
3) Подсолнухи - у них всегда есть центр, от которого семена расходятся к периферии с определенным интервалом, образуя узоры и спирали.

[5] Блинова И.В., Попов И.Ю. «Кривые, заданные параметрически и в полярных координатах» [Учебное пособие], университет ИТМО, Санкт-Петербург, 2017 г.

4) Папиллярные узоры – спирали на отпечатках пальцев.



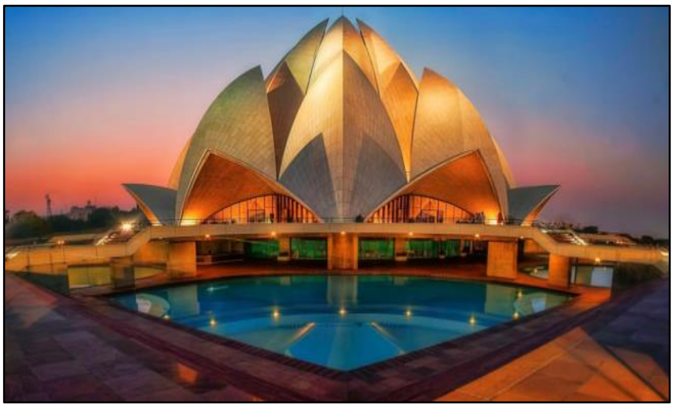
5) Орнамент – узоры, используемые для украшения различных зданий или их частей, утвари, мебели и т.д.



6) Космические объекты – многие галактики тоже имеют спиральную форму.

В мире существует огромное количество зданий специфической формы, в которых есть спирали, различные геометрические фигуры или другие причудливые формы:

1) Главный храм религии Бахаи (в Индии) имеет вид лотоса, сооружен в 1986 году. Размеры этой святыни действительно впечатляют: высота – около 40 м, площадь главного зала – 76 кв. м, вместимость – 1300 человек.



2) Башня «Эволюция», Москва – Сити, построенная в форме молекулы ДНК, в 2015 году.

3) Башня «F&F» (Альтернативное название – Башня Революции). Высота офисного небоскреба составляет 243 метра, а угол его вращения достигает 360 градусов.

Кроме того, спирали нашли практическое применение в жизни человека. Например, спираль Архимеда применяется в кулачковых механизмах, которые преобразуют вращательные движения шайбы в поступательные движения стержня.

Также спирали широко используются в самоцентрирующихся патронах, направляющие канавки которых имеют форму спирали Архимеда.

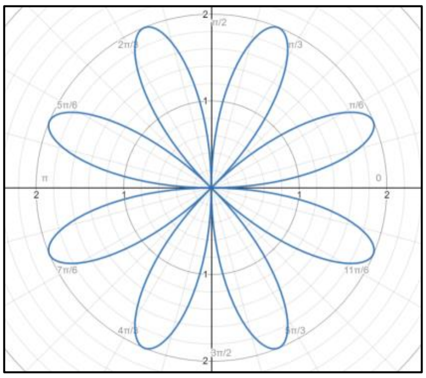
2.6 ПОСТРОЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ РОЗ ГРАНДИ

Одно из некоторых уравнений, которое задает Розы Гранди, это:

$r = a \times \sin k \times \varphi$, где

k – положительное рациональное число, которое задает количество лепестков

a – положительное число, которое определяет размер лепестков



1) Для первого раза мы решили взять положительные числа (a = 2, k = 4)

Так как k – положительное число, то количество лепестков удвоится:

В итоге выходит 8 лепестков, с длиной, равной двум (т.к. a = 2; k = 4, оно четное, количество лепестков умножается на 2).

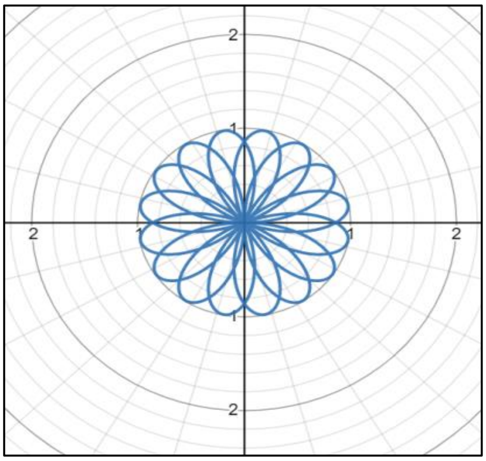
2) Если же k = 2, a = 1, то получится маленький цветок

Далее рассмотрим уравнение:

$$r = a \times \sin\left(\left(\frac{c}{b}\right) \times \varphi\right)$$

В данной формуле, число лепестков задаётся не k, а параметрами b и c. Будем постоянно изменять b и c, но «a» возьмем за единицу (для удобства просмотра Роз).

b = 3, c = 8:

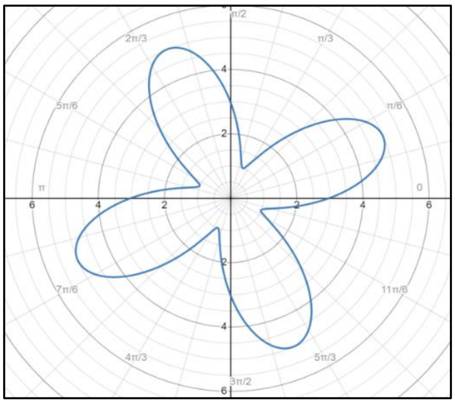


Рассмотрим еще одно уравнение:

$$r = a \times sin(k \times \theta) + m$$

В этой формуле все Розы стремятся к форме окружности (из-за переменной m). Еще одна особенность данной формулы – четность k никак не влияет на количество лепестков, то есть при любом значении k – оно останется таким же.

a = 2, k = 4, m = 3:



Как бы ни менялось значение всех параметров, Розы будут стремиться к идеальному кругу – окружности[6].

[6] Розы (кривые Г. Гранди), [Электронный ресурс] URL: Розы (кривые Г. Гранди) (desmos.com)

2.7 ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТ В ЖИЗНИ ЧЕЛОВЕКА

Полярные координаты применяются в различных сферах жизни человека, таких как:

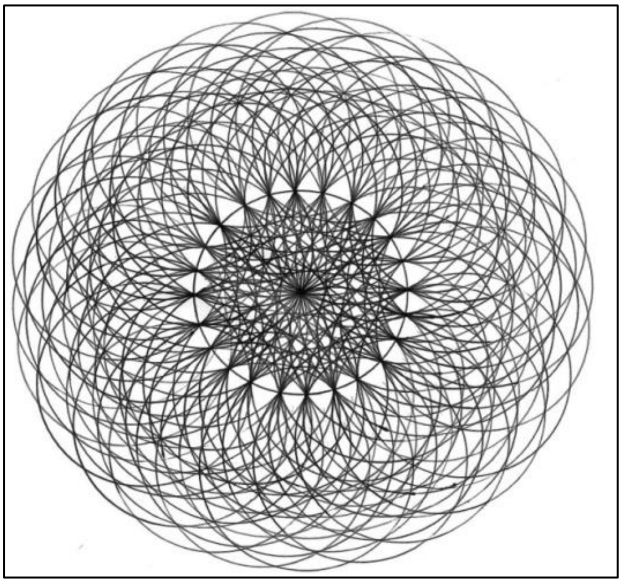
1) Военная сфера - координаты цели могут выдаваться в полярной системе координат (азимут, дальность), прямоугольной (X, Y), геодезической (широта, долгота).

2) Фотографии - Вертикальные линии после того, как к ним применен фильтр (переводящий положение точек из прямоугольной системы в полярную), стали расходиться из центральной точки.

3) Медицина - Компьютерная томография сердца проводится в системе полярных координат.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе данной исследовательской работы мы ознакомились с семейством Роз Гранди. Эта работа позволила по - новому взглянуть на красоту окружающего нас мира – математика позволяет нам в точности изобразить эту красоту. Кроме этого, мы познакомились с полярной системой координат и научились строить Розы Гранди по нескольким формулам. В ходе работы было показано практическое применение разнообразных Роз Гранди и спиралей, которые активно используются в самых разных отраслях жизни человека.



3.1 СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1) Блинова И.В., Попов И.Ю. «Кривые, заданные параметрически и в полярных координатах» [Учебное пособие], университет ИТМО, Санкт-Петербург, 2017 г.
2) Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике [Справочник] , М., 1966 г.
3) Примеры графиков функций в полярных координатах, [Электронный ресурс] URL: http://grafikus.ru/examples/polar-functions
4) Розы (кривые Г. Гранди), [Электронный ресурс] URL: Розы (кривые Г. Гранди) (desmos.com)
5) Спирали | Виды спиралей, [Электронный ресурс] – Википедия URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D0%BF%D0%B8%D1%80%D0%B0%D0%BB%D1%8C#%D0%9F%D0%BB%D0%BE%D1%81%D0%BA%D0%B8%D0%B5_%D1%81%D0%BF%D0%B8%D1%80%D0%B0%D0%BB%D0%B8
6) https://ru.wikipedia.org/wiki/Гранди,_Гвидо_(философ)
7) https://ru.wikipedia.org/wiki/Роза_(плоская_кривая)

Рецензия
на работу обучающегося 11 «А» класса
МБОУ СОШ № 28 г. Пензы им. В. О. Ключевского
Горбачевского Егора Кирилловича
«Замечательные математические кривые – Розы Гранди и спирали»

Работа **«Замечательные математические кривые – Розы Гранди и спирали»** представляет собой исследование в области математики. В работе представлено обоснование темы, указана актуальность, практическая значимость, определены цели и задачи, объект и предмет исследования, обозначены особенности анализируемого материала, описаны методы исследования, выдвинута гипотеза по обозначенной проблеме.

В ходе выполнения работы обучающийся рассмотрел теоретические основы данного вопроса, обратился к источникам, освещающим историю Роз Гранди, рассмотрел формулы Роз Гранди, разновидности спиралей и Роз в математике и в жизни, способы построения Роз Гранди.

В практической части автор создает свои собственные Розы Гранди.

Практическая значимость исследования определяется тем, что рассмотренные и описанные материалы могут быть использованы на кружковых занятиях по математике. Материал работы будет полезен любителям математики для расширения математического кругозора.

Работа соответствует целям и задачам изучаемой проблемы, в структуре работы просматривается логика изложения, самостоятельность в разработке темы.

Оформление работы соответствует требованиям и критериям, предъявляемым к работам на V открытый региональный конкурс исследовательских и проектных работ школьников «Высший пилотаж – Пенза» 2023.

В представлении результатов работы предполагается использование презентации.

Рецензент

Бутусова Татьяна Валерьевна,
учитель математики высшей категории
МБОУ СОШ № 28 города Пензы имени
Василия Осиповича Ключевского