Управление образования города Пензы
МКУ «Центр комплексного обслуживания и методологического обеспечения учреждений образования» города Пензы

Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение средняя общеобразовательная школа № 66 города Пензы имени Виктора Александровича Стукалова

XXVI научно-практическая конференция школьников города Пензы
«Я исследую мир»

Инвариант и его применение в математике

<u>Автор работы</u>: Кобзева Арина,

ученицы 8а2 класса.

<u>Руководитель</u>: Ширикова Татьяна Владимировна,

учитель математики средней школы № 66 г.Пензы имени Виктора Александрова Стукалова

Пенза 2021г.

Содержание

Введение.

Решая разные олимпиадные задачи по математике, я выделила группу задач, подход к решению которых мне показался интересным и новым. Хочу показать его на примере.

Пример 1. На доске написаны шесть чисел: 1, 2, 3, 4, 5, 6. За один ход разрешается к любым двум из них одновременно добавлять по единице. Можно ли за несколько ходов все числа сделать равными?

Решение. Сумма написанных чисел нечетна (она равна 21). За каждый ход эта сумма увеличивается на 2, т. е. всегда остается нечетной. А сумма шести равных чисел всегда четна. Это значит, что сделать числа равными невозможно. **Ответ.** Нельзя.

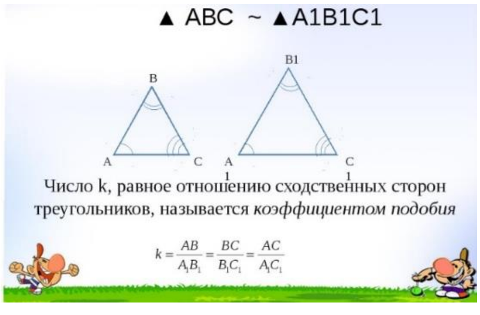
Пример 2. 100 фишек выставлены в ряд. Разрешено менять местами две фишки, стоящие через одну. Можно ли с помощью таких операций переставить все фишки в обратном порядке?

Решение. Пронумеруем места, на которых стоят фишки, числами от 1 до 100. Заметим, что после выполнения данной в условии операции номер каждой фишки либо не изменился, либо изменился (увеличился или уменьшился) на 2. Таким образом, фишка, стоящая вначале на месте с четным номером, в любой момент остается стоять на месте с четным номером. Следовательно, фишка, стоящая на месте под номером 100, никогда не сможет попасть на клетку с номером 1. **Ответ**. Нельзя.

В каждой из этих задач мы заметили, что есть что-то, что не меняется при выполнении условия. В первой задаче – это нечетность суммы чисел. Во второй – четное и нечетное место фишки.

Мы нашли, говорят «инвариант». Что это за понятие? В переводе на русский язык слово *«инвариантность»* означает *«неизменяемость»*. Неизменяемость чего-то по отношению к чему-то. **Инвариантом некоторого преобразования называется величина или свойство, не изменяющееся при этом преобразовании.**

Подобные треугольники. Инвариантом можно считать равенство соответственных углов. Отношение их сходственных сторон, которое всегда остается одинаковым и равно коэффициенту подобия.



Что же можно считать инвариантом? Какие задачи решаются с помощью этого понятия? Меня заинтересовала данная тема, и я решила в ней разобраться. Поэтому целью моей работы является исследование круга математических задач, которые можно решить с помощью такого понятия, как «инвариант». Чтобы достичь поставленной цели, я поставила перед собой следующие задачи:

Изучить теорию по данной теме;

Выяснить, какие типы задач можно решить с использованием инвариантов;

Проанализировать выбранный метод для решения конкретных задач и разбить их на классы.

Объект исследования: задачи по математике.

Предметом исследования являются задачи, которые можно решить с помощью такого понятия как инвариант.

Теоретическая значимость работы заключается в отборе задач, которые можно решить с помощью инварианта.

Практическая значимость работы состоит в том, что материал работы может служить основой для подготовки к олимпиадам.

Олимпиадные задачи, решаемые с помощью инвариантов.

Решая разные олимпиадные задачи, я старалась найти в каждой из них какое - то свойство или величину, которая не меняется. Такие задачи часто выделяются уже по самому условию: обычно речь в них идёт о каких-либо позициях, действиях, играх и т. п

Но все эти задачи можно условно разбить на два вида: те, в которых требуется доказать некий инвариант, т. е. он явно определён, и те, в которых инвариант используется при решении и сразу неочевиден. В чём же состоит главная идея применения инварианта? В задаче задан некий объект, над которым производятся некоторые операции. Ставится вопрос: можно ли получить с помощью этих операций другой объект с определённым свойством? Чтобы выяснить это, мы строим некую величину, которая не изменяется при совершении разрешённых операций (инварианта), и если значения этой величины различны у двух указанных объектов, то ответ на вопрос задачи отрицательный. Если выбранный инвариант даёт одинаковые значения для двух объектов, это ещё не значит, что один можно получить из другого указанными операциями! Но часто найденный инвариант позволяет это доказать. Придумать инвариант бывает достаточно сложно. В качестве инварианта чаще всего рассматриваются четность (нечетность) чисел и остаток от деления. Причем применение четности – одна из наиболее встречающихся идей при решении олимпиадных задач, как это было в примере под номером 1. Рассмотрим примеры.

Пример 3. Леша получил двойку за контрольную работу по математике и в порыве отчаяния разорвал листок со своей работой на десять кусков. Затем один из получившихся кусков он разорвал еще на 10 кусков. Может ли по завершении релаксации оказаться 1) 2 012 кусков бумаги; 2) 2 017 кусков бумаги?

Решение. Для начала важно определить, что в данной задаче является инвариантом. Попробуем проанализировать. Сначала у Леши был 1 листок – это один кусок. На втором шаге листков стало 10, то есть их количество увеличилось на 10 – 1 = 9 листков. На третьем шаге листков будет уже 19, и их количество, очевидно, опять увеличится на 19 – 10 = 9 листков, и так далее. Таким образом, нетрудно видеть, что инвариантом, то есть неизменной величиной на каждом шаге, в данной задаче является количество листков, на которое увеличивается общее число листков. Теперь разберемся, как нам поможет знание инварианта при решении данной задачи. Построим следующую схему.

1 шаг – 1 листок; 2 шаг – 1 + 9 листков;   3 шаг – 1 + 9 + 9 листков;   и так далее.

Из нее видно, что, если предположить, что в конечном счете может оказаться 2 012 листков, то число 2 012 – 1 = 2011 должно делиться нацело на 9. Но это неверно. Значит, 2 012 кусков в конечном итоге получиться не может.

Теперь рассмотрим случай 2. Число 2 017 – 1 = 2 016 делится на 9, так как сумма его цифр делится на 9. А, значит, второй вариант возможен. **Ответ: 1) да; 2) нет.**

В этой задаче используется признак делимости на 9.

Пример 4. Каждая клетка квадратной таблицы 2×2 закрашена в чёрный или белый цвет За один ход можно перекрасить клетки в любой строке, в любом столбце или в любой диагонали: чёрные — в белый цвет, а белые — в чёрный цвет. Можно ли через несколько ходов получить таблицу, все клетки которой белые?

Решение. Сопоставим каждой клетке 1, если она покрашена в белый цвет, и −1, если она покрашена в чёрный цвет. Тогда смена цветов означает замену знаков. Рассмотрим произведение всех чисел, соответствующих клеткам. Так как при перекрашивании мы изменяем знаки ровно у двух сомножителей, то произведение всех четырёх чисел не изменяется. В самом начале это произведение равно −1. Требуемой раскраске соответствует произведение, равное 1. Следовательно, указанными операциями перекрасить таблицу невозможно. **Ответ.** нет.

В этой задаче используется свойство произведения отрицательных и положительных чисел.

Пример 5. Может ли разность двух четырехзначных чисел, полученных перестановкой цифр, равняться 2005.

Решение. Четырехзначные числа, полученные перестановкой цифр, имеют одинаковую сумму цифр. По признаку делимости на 3 оба числа имеют равные остатки при делении на 3, поэтому их разность должна делиться на 3. Но число 2005 не делится на 3, значит, разность этих чисел не может равняться 2005. **Ответ.** нет.

В этой задаче используется свойство делимости разности двух чисел: если при делении на три у двух чисел равные остатки, то их разность делиться на три.

Таким образом. с помощью инварианта можно показать невозможность или возможность достижения некоторого состояния объекта, а значит, инвариант является основой для решения большого класса задач. В качестве инвариантов рассматриваются следующие понятия:

-чётность (нечётность)

-остаток от деления

-перестановки

-раскраски

-сумма или произведение каких-нибудь чисел

- и т.д

Наряду с инвариантностью какой то величины или какого то свойства в математике под инвариантностью понимается *неизменяемость каких-либо выражений с переменными или функций по отношению к каким-либо преобразованиям над этими самыми переменными*. Это может быть замена одной переменной на другую, смена знака и т.п.

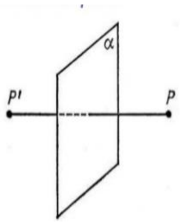
Поясню это на простом пример. Все мы с начальной школы знаем переместительное свойство сложения двух чисел: $a + b = b + a$

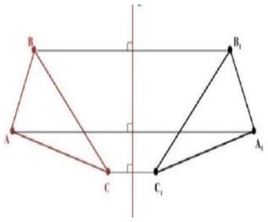
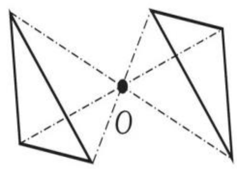
От перестановки слагаемых сумма не меняется. По-научному этот факт означает, что выражение a + b инвариантно относительно замены: a на b и b на a. Можно сколько угодно менять буквы местами, но суть всего выражения от этих перестановок не изменится.

Другой пример инвариантности – чётность функции. Если функция f(x) чётная, то, как мы знаем, f(-x) = f(x), и тогда можно сказать, что функция f(x) инвариантна относительно замены x на $-x$. Такое свойство функции носит название – симметрия.

Симметрии. Преобразования, сохраняющие вид уравнений. Инварианты.

На уроках геометрии мы уже встречались с геометрическими симметриями: зеркальная симметрия; симметрия относительно прямой; центральная симметрия, когда предмет переходит сам в себя при повороте относительно некоторого центра.



Симметрия – это преобразование, которое не меняет расстояние между двумя точками. Можно сказать, что расстояние между двумя точками фигуры при симметриях инвариантно. Однако понятие симметрии, как я узнала, гораздо шире, чем в указанных случаях. В общем случае под симметрией понимается неизменность при какой-либо процедуре не только предметов, но и физических явлений, математических формул, уравнений т. д.

В наиболее простой трактовке (по Г. Вейлю) современное определение симметрии выглядит примерно так: симметричным называется такой объект, который можно как-то изменять, получая в результате то же, с чего начали. Современное представление о симметрии предполагает неизменность объекта по отношению к каким-то преобразованиям, выполняемым над ним, т.е. с самой общей точки зрения, понятие симметрии связано с инвариантностью по отношению к каким-либо преобразованиям.

В своей работе я рассмотрела ряд уравнений и их систем для решений или упрощений которых используется понятие «симметрия».

Под симметриями математических уравнений будут пониматься преобразования, сохраняющие вид уравнений. Ниже приведены примеры конкретных уравнений, которые сохраняют свой вид при некоторых простых преобразованиях.

Пример 6. Рассмотрим биквадратное уравнение $\mathbf{x^4 + 9x^2 + 1 = 0}$.

Замена x на $(-x)$ приводит к точно такому же уравнению (т.е. уравнение сохраняет вид при преобразовании $x \Rightarrow -x$).

Два других преобразования $x = \pm 1/x$ также сохраняют вид уравнения, поскольку после умножения на x^4 получим $x^4 + 9x^2 + 1 = 0$.

В этом случае, инвариант преобразования — это функция (отличная от постоянной), которая сохраняет вид при действии данного преобразования.

Уравнения, содержащие четные степени

Рассмотрим алгебраическое уравнение

$x^6 + x^4 + x^2 + 1 = 0$, (1) содержащее только четные степени.

Биквадратное уравнение является частным случаем уравнения (1).

Замена x на (− x) приводит точно к такому же уравнению.

Говорят, что уравнение (1) инвариантно относительно преобразования x => − x. Отсюда следует, что если уравнение (1) имеет решение $x = x_1$, то оно имеет также другое решение: $x = -x_1$. Т.е. корни уравнения – противоположные числа, следовательно, их квадраты равны. Значит $z = x^2$ является инвариантом данного уравнения.

Если выбирать инвариант за новую переменную ($z = x^2$), то уравнение (1) порядка 6 преобразуется к уравнению порядка 3: Таким образом, переход от исходной переменной x к инварианту преобразования $z = x^2$ позволяет упростить рассматриваемое уравнение (понизить его степень в два раза).

$z^3 + z^2 + z + 1 = 0$, $z^2 (z + 1) + z + 1 = 0$, $(z + 1)(z^2 + 1) = 0$, $z + 1 = 0$ или $z^2 + 1 = 0$,

$z = -1$ или $z^2 = -1$,

Ответ. корней нет.

Пример 7. Решить уравнение $x^4 + 5x^2 – 36 = 0$.

Решение. Подстановка: $x^2 = t$. $t^2 + 5t – 36 = 0$. $t^2 + 9t – 4t – 36 = 0$. $t (t + 9) – 4(t + 9) = 0$ $(t + 9)(t – 4) = 0$, $t_1 = -9$ и $t_2 = 4$. $x^2 = -9$ или $x^2 = 4$. В первом уравнении корней нет, из второго: $x = \pm 2$. **Ответ: $x = \pm 2$.**

Возвратные уравнения

Возвратное алгебраическое уравнение четной степени имеет следующий вид

$1x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1 = 0$ (2)

в котором коэффициенты, одинаково удаленные от начала и конца, равны между собой.

Замена x=1/x преобразует уравнение (2) в точно такое же уравнение. Отсюда следует, что если уравнение (2) имеет корень x = b, то оно имеет также другое решение x = 1/b. Простейшее возвратное уравнение - квадратное уравнение $2x^2 + 3x + 2 = 0$. Делим его обе части на x: $2(x + 1/x) + 3=0$. Результат удобно представить в форме уравнения первого порядка $2z + 3 = 0$, где $z = x + 1/x$ инвариант преобразования.

Теорема 1. В общем случае возвратное уравнение четного порядка допускает понижение порядка с помощью подстановки $z = x + 1/x$. В результате получается алгебраическое уравнение, порядок которого в два раза меньше.

Теорема 2. В общем случае возвратное алгебраическое уравнение нечетного порядка имеет корень $x = -1$, следовательно его левую часть можно представить в виде произведения двух множителей. один из которых $(x + 1)$. а второй - возвратный многочлен четной степени.

Пример 8. Решить уравнение $\mathbf{2x^5 - 3x^4 - x^3 - x^2 - 3x + 2 = 0}$

Решение. Уравнение имеет один корень, равный -1, и делением на $x + 1$, приведем его к возвратному уравнению четной степени. $2x^4 - 5x^3 + 4x^2 - 5x + 2 = 0$. После деления на x^2 получим уравнение $2x^2 - 5x + 4 - 5/x + 2/x^2 = 0$, $2(x^2 + 1/x^2) - 5(x + 1/x) + 4 = 0$. Сделаем замену $t = x + 1/x \implies x^2 + 1/x^2 = t^2 - 2$. Тогда уравнение будет выглядеть так:

$2(t^2 - 2) - 5t + 4 = 0 \implies t_1 = 0$, $t_2 = 5/2$. Сделаем обратную замену: $x + 1/x = 0$ – это уравнение корней не имеет, $x + 1/x = 5/2$ – корни этого уравнения $x_1 = 2$ и $x_2 = 0{,}5$.

Ответ. -1; 0,5; 2.

Системы алгебраических уравнений, симметричные относительно перестановки аргументов.

Многочлен от двух переменных называется симметрическим, если он не меняется при перестановке аргументов: $(x, y) \Rightarrow (y, x)$. Простейшие симметричные многочлены $u = x + y$, $v = xy$ называются элементарными. Эти многочлены являются простейшими алгебраическими инвариантами при перестановке аргументов.

Любой симметрический многочлен от двух переменных может быть единственным образом выражен через элементарные многочлены.

Для решения систем двух алгебраических уравнений с симметрическими многочленами, можно в качестве новых переменных использовать элементарные симметрические многочлены. Подобные системы обладают следующим свойством: если система имеет решение $x = x_0$, $y = y_0$, то она имеет также решение $x = y_0$, $y = x_0$.

Пример 9. Решим систему уравнений $\begin{cases} \boldsymbol{x^2 + xy + y^2 = 49}, \\ \boldsymbol{x + y + xy = 23}. \end{cases}$

Решение. Сделаем замену неизвестных $u = x + y$, $v = xy$. Система примет вид: $\begin{cases} u^2 - v = 49, \\ u + v = 23. \end{cases}$ Сложив эти уравнения? получим уравнение $u^2 + u - 72 = 0$ с

корнями $u_1 = 8, u_2 = -9.$ Соответственно $v_1 = 15, v_2 = 32.$ Остается решить системы уравнений: $\begin{cases} x + y = 8, \\ xy = 15. \end{cases}$ (3;5),(5;3) $\begin{cases} x + y = -9, \\ xy = 32. \end{cases}$ решений нет. **Ответ.** (3;5), (5;3)

Решая данные уравнения и системы, я пришла к выводу, что существуют функции, при подстановке которых в другую функцию вместо переменной икс, вид первоначальной функции не меняется. Т.е. эти функции являются инвариантами.

Очевидно, что функция φ(x) = x является инвариантом любой функции.

Ясно, что функция φ(x) = - x является инвариантом четной функции.

Если функция f (x) периодическая с периодом T, то функция f (x) = x + kT, где k – целое число, инвариант f (x).

Отметим, что если график функции f (x) симметричен относительно прямой x = a, то функция φ(x) = 2a – x является инвариантом f (x). Действительно, в этом случае f (a-x) = f (a+x) и, значит, f (2a-x) = f (a-(x-a)) = f(a+(x-a)) = f (x). Верно и обратное. Если φ(x) = 2a – x – инвариант f(x), то график функции f(x) симметричен относительно прямой x = a.

Функция φ (x) = 1/x является инвариантом функции f (x) = $\frac{x}{x^2+1}$

Выводы.

Работая над данной темой я выяснила, что такое «инвариантность», и поняла, что понятие инвариантности, т.е. неизменности математического объекта (числового множества, выражения, функции, уравнения и т.д.) относительно некоторых преобразований играет важную роль в современной математике.

Наличие того или иного свойства инвариантности у математического объекта позволяет установить некоторые общие качественные свойства этого объекта, что можно использовать не только при решении ряда задач, но и при классификации объектов.

Описанный мной метод, основанный на использовании инвариантов, позволяет решать и упрощать такие типы алгебраических уравнений, как уравнения с четными степенями, возвратные уравнения и системы алгебраических уравнений.

Я выяснила, что с самой общей точки зрения, понятие симметрии связано с инвариантностью по отношению к каким-либо преобразованиям, т.е. симметричным (в современном представлении) называется такой объект, который можно как-то изменять, получая в результате то же, с чего начали, те современное представление о симметрии предполагает неизменность объекта по отношению к каким-то преобразованиям, выполняемым над ним.

Данная тема для меня явилось достаточно интересной и актуальной, так как с ее помощью можно разобраться в решении не только олимпиадных задач, но и уравнений и систем.

Литература.

1. А.Д.Полянин *Элементарная теория использования инвариантов для решения математических уравнений*. 2008 Вестник СамГУ — Естественнонаучная серия. 2008. №6(65).
2. Болтянский В. Г., Виленкин Н. Я. *Симметрия в алгебре.* — 2-е изд. — М.: МЦНМО, 2002. —240 с. — ISBN 5-94057-041-0.
3. Фалин Г. И., Фалин А. И. *Инвариантность и задачи с параметрами*. // Квант. — 2007. — № 5. — С. 45–47.
4. Е. Ю. Иванова. *Олимпиадные задачи: методическая разработка для учащихся заочного отделения МММФ.* — М. : изд-во Центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 2008. — 24 с.
5. Шарыгин, И.Ф. *Факультативный курс по математике.*
   Учебное пособие для 10 класса общеобразовательных учреждений. Издание: П росвещение Год: 1994 Страниц: 252 .
6. Гуревич Г.Б.: *Основы теории алгебраических инвариантов*, М.-Л.,1948.
7. Чучаев И.И. *Симметрии графиков функций и элементарные уравнения* СОРОСОВСКИЙ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ ЖУРНАЛ, ТОМ 6, №11, 2000