



Управление образования города Пензы

МБОУ СОШ №56 г. Пензы им. Героя России А.М. Самокутяева

Конкурс научных работ им. Менделеева

# ВИРТУАЛЬНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛАБОРАТОРИЯ «1С:МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КОНСТРУКТОР»

**Выполнил:**

Волков Владислав Витальевич,  
МБОУ СОШ №56 г. Пензы  
им. Героя России А.М. Самокутяева,  
9 «А» класс

**Руководители:**

Смирнова Татьяна Борисовна и  
Брагина Юлия Андреевна,  
учителя математики МБОУ СОШ №56

Пенза, 2021

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение .....	3
<b>Глава 1. Интерактивная творческая среда «1С: Математический конструктор»</b>	
1.1 Возможности «1С: Математического конструктора».....	4
1.2. Ключевые особенности «1С: Математического конструктора».....	6
<b>Глава 2. Использование «1С: Математический конструктор» для изучения задач повышенной сложности.</b>	
2.1. Применение «1С: Математический конструктор» при решении задач на построение.....	7-12
2.2. Применение «1С: Математический конструктор» при решении задач с параметром .....	12-15
Заключение.....	16
Литература и источники.....	16

## **Введение**

На уроках геометрии я и многие мои одноклассники при решении задач на построение поняли, что не всегда получается найти все возможные решения. С похожей ситуацией я столкнулся, когда пытался решить задачи повышенной сложности на уроках алгебры. Зачастую, найдя одно решение, в голову не приходят иные решения. А если в задаче не найдены все решения, значит, задача не решена полностью.

Я задался вопросом «Что же может помочь научиться находить все решения каждой задачи?». Одним из возможных путей устранения обозначенной проблемы является изучение и применение программы «1С: Математический конструктор». Это определило актуальность выбранной темы исследования.

### **Актуальность темы:**

1. Приобретение опыта решения задач с использованием программы «1С: Математический конструктор» помогает повысить уровень логической культуры.
2. Изучение данной темы позволит более глубоко подготовиться к олимпиадам, ОГЭ и ЕГЭ по математике.

### **Цель работы:**

изучение программы «1С: Математический конструктор» и овладение методами математических рассуждений по средствам данного программного обеспечения при освоении школьного курса математики и решении задач повышенной сложности.

### **Задачи исследования:**

1. Изучить возможности «1С: Математический конструктор», помогающие школьнику.
2. Рассмотреть ключевые особенности «1С: Математического конструктора» в сравнении с другими средами динамической геометрии.
3. Применить «1С: Математический конструктор» для решения задач на построение.
4. Применить «1С: Математический конструктор» при решении задач с параметром.

**Объект исследования:** «1С: Математический конструктор».

**Предмет исследования:** задачи повышенной сложности.

Методы исследования: анализ, сравнение, обобщение, моделирование.

**Теоретическая значимость:** выявление особенностей решения задач с несколькими решениями.

**Практическая значимость:** использование данного материала на элективных курсах для повышения уровня функциональной математической грамотности, подготовки к олимпиадам, ОГЭ и ЕГЭ по математике.

**Гипотеза:** «1С: Математический конструктор» поможет научиться находить все решения задач повышенной сложности.

## **Глава 1. Интерактивная творческая среда «1С: Математический конструктор»**

### **1.1 Возможности «1С: Математический конструктор», помогающие школьнику.**

Математический конструктор представляет собой российскую разработку в области интерактивных динамических сред для образования. Разработчик программы — фирма 1С, которая, начиная с 1996 года, занимается созданием образовательных мультимедийных продуктов. Программа позволяет создавать интерактивные модели, объединяющие конструирование, динамическое варьирование, эксперимент, и может быть использована на всех этапах математического образования.[1]

К особенностям «1С: Математического конструктора» относятся:

- возможность использовать продукт как дома, так и в школе в рамках различных форм проведения уроков и адаптироваться под различную компьютерную оснащенность учебного кабинета;
- предоставление возможности быстрее и эффективнее освоить школьный курс по математике, повысить запоминаемость материала;
- возможность изучения курса математики за счет включения элементов эксперимента и исследования;
- повышение степени эмоциональной вовлеченности и интереса учеников, обеспечение возможности постановки творческих задач и организации проектной работы;
- возможность продемонстрировать, как современные технологии эффективно применяются для моделирования и визуализации математических понятий и фактов.

К техническим особенностям относятся:

- возможность создания полнофункциональных и работающих автономно от программы конструктора готовых моделей, содержащих любые инструменты и команды полной версии программы, включая инструменты построений, а не только возможность передвижения элементов чертежа;
- удобный, интуитивно понятный графический интерфейс, предоставление возможности настраивать интерфейс создаваемых учебных моделей;
- обеспечение экспорта создаваемых учебных моделей в виде интернет-совместимых java-апплетов, независимых от программы-редактора, но позволяющих использовать все возможности конструктивной среды;
- обеспечение возможности работы на компьютерах под управлением операционных систем Windows, Linux, MacOS;

Среда конструктора может быть использована по-разному.

Во-первых, конструктор может выступать в качестве среды с инструментами для самостоятельной работы обучающихся на уроке или дома. При этом перед обучающимися ставятся задачи на построение и исследование определенных объектов, в ходе решения которых и должны достигаться те или иные учебные цели.

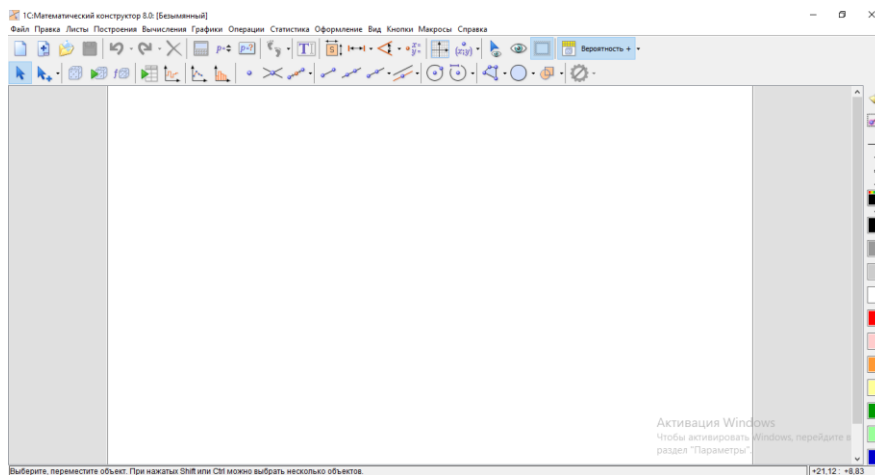
Во-вторых, конструктор может использоваться учителем для создания конкретных моделей-заданий, содержащих объяснение материала, заготовки геометрических объектов, тексты с условиями и чертежи с данными, пошаговые планы построений и т. п. информацию. После чего ученики работают не с конструктором как таковым, а с этими готовыми моделями.

Динамический наглядный механизм «Математического конструктора» может применяться для обучения как школьников младшего возраста, давая им возможность

творческого управления объектами, так и учеников старшей школы, представляя собой полнофункциональную среду для конструирования и решения задач.[2]

В своем первоначальном виде данная программа предоставляет пользователю набор виртуальных чертежных инструментов, с помощью которых на экране, как на обычном листе бумаги, появляется возможность выполнять классические геометрические построения.

**Рисунок 1**



Существенной особенностью полученного чертежа является то, что конструктор запоминает порядок построения, а исходные данные можно изменять достаточно быстро и просто, перетаскиванием мышью, например, точек, что влечет соответствующие изменения всей конструкции. Помимо чертежных инструментов, в данной программе есть возможность измерения углов, расстояний и площадей, рисования следов точек при вариации данных с помощью различных инструментов, а также для оформления чертежей -- изменение цвета фигур, создание буквенных обозначений и подписей и т. п. «Математический конструктор»- это современное программное обеспечение динамической геометрии, позволяющее выполнять преобразования фигур, строить геометрические места точек и графики функций, динамически зависящие от параметров, широко использовать координаты. В дополнение к инструментам для создания собственно динамических чертежей эта программа содержит и инструменты для создания презентаций на их основе и тестирований.

Программа динамической геометрии позволяет, прилагая минимальные усилия, создавать чертежи высокого качества и добиваться необходимого расположения их элементов, не начиная построения чертежа сначала, и это, конечно же, очень ценно. Но еще более важно то, что появилась возможность не просто представить, а увидеть изменяющийся чертеж. Благодаря такой функции можно выделить те свойства объекта, которые сохраняются при вариации, то есть следствия условий, накладываемых на рассматриваемую фигуру. К примеру, нетрудно заметить, что некоторые прямые всегда параллельны или какие-то отрезки равны. Именно поэтому модель становится и инструментом для геометрических открытий, а также сам процесс построения становится гораздо более поучительнее в его компьютерном варианте, так как требует от ученика абсолютно полного понимания алгоритма построения и точности его выполнения.

## **1.2. Ключевые особенности «1С: Математического конструктора».**

Теперь рассмотрим ключевые особенности «Математического конструктора», которые отличают его от других программ динамической геометрии .

Наиболее известными программами динамической геометрии являются GeoGebra (автор Marcus Hohenwater), «The Geometer's Sketchpad» (русифицирована Институтом Новых Технологий и распространялась в России вначале под названием «Живая геометрия», а затем «Живая математика») и 1С: Математического конструктора.

При сравнении этих программ я обнаружил, что не каждая из них есть в свободном доступе. Так например, программу «Живая математика» можно найти бесплатно в демо-версии. «GeoGebra» и «1С: Математического конструктор» можно найти абсолютно бесплатно на сайте разработчика. [3;4]

Математический конструктор предоставляет возможность создавать независимые от основной программы модели, запускаемые любой программой для просмотра web-страниц, к примеру, обычным «интернет-проводником» Windows, благодаря чему эти модели можно свободно распространять. Стоит отметить, что в такого рода модели «Математический конструктор» позволяет включить любой необходимый набор инструментов, исключение составляет только лишь такая команда как сохранение построений. «GeoGebra» такой возможностью не обладает.

Расширен ассортимент инструментов в программе «Математический конструктор» по сравнению с аналогичными системами. Появились инструменты для автоматической проверки правильности построений, а также для создания и проверки контрольных вопросов на выбор и ввод ответа; специальные команды для построения графиков и работы с ними; дополнительные команды для оформления чертежей.

Разработчики позаботились о том, чтобы «Математический конструктор» работал под управлением таких распространенных и всем известных операционных систем как Windows, Linux, MacOS,

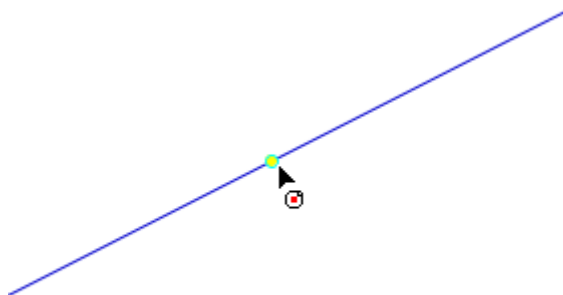
Я, как пользователь программы, могу обнаружить в ней разнообразные подсказки, которые помогут и подскажут при выполнении необходимых операций.

Так, например, при наведении мыши на тот или иной инструмент, появляются всплывающие подсказки.

Рисунок 2



При выборе любого инструмента у указателя мыши показано, как нужно пользоваться данным инструментом, куда нужно нажать, чтобы инструмент сработал.



### Выводы:

1. Возможность использовать продукт как дома, так и в школе.
2. «1С: Математический конструктор» позволяет быстрее и эффективнее освоить школьный курс математики.
3. Программная среда дает возможность проводить различные эксперименты и исследования в области математики.
4. Использовать данное программное обеспечение может как ученик, для самостоятельной работы, так и учитель на уроке для работы с классом.
5. Математический конструктор предоставляет возможность создавать независимые от основной программы модели.
6. Преимуществом рассмотренной среды являются инструменты для автоматической проверки правильности построений, а также для создания и проверки контрольных вопросов на выбор и ввод ответа; специальные команды для построения графиков и работы с ними; дополнительные команды для оформления чертежей.

Внимательно изучив инструментальный комплекс «1С: Математический конструктор», я сделал выводы о том, что он без затруднений встраивается в учебный процесс и дает мне множество возможностей использования его в учебных целях.

## Глава 2. Использование «1С: Математический конструктор» для изучения задач повышенной сложности.

### 2.1 Применение «1С: Математический конструктор» при решении задач на построение.

Задача, изложенная ниже, имеет несколько решений. Рассмотрим, как с помощью возможностей «1С: Математический конструктор» удалось найти все решения.

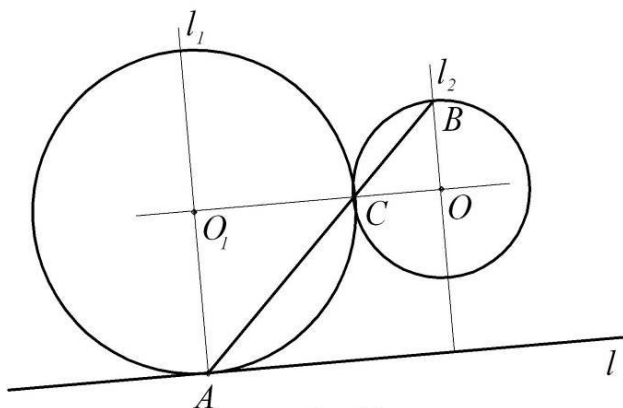
**Пример 1.** Построить окружность, касающуюся данной окружности и прямой в данной точке А.[5]

#### Решение.

Сначала проведем анализ.

Предположим, что задача решена и  $\omega_1(O_1, O_1A)$  – искомая окружность (рис 8). Если построить точку  $O_1$ , то окружность  $\omega_1(O_1, r_1)$ , где  $r_1 = O_1A$ , будет искомой. То есть, делаем вывод, что задача сводится к построению точки  $O_1$ .

**Рисунок 4.**



Так как прямая  $l$  касательная к искомой окружности  $\omega_1(O_1, r_1)$ , то точка  $O_1$  должна лежать на прямой, перпендикулярной прямой  $l$ , назовем ее  $l_1$ .

Кроме того, заметим, что точка  $O_1$  лежит на прямой  $OC$ . Из того, что центры касательных окружностей лежат на одной прямой с точкой касания, делаем вывод о том, что вопрос сводится к нахождению положения точки  $C$ .

Соединим точки  $A$  и  $C$  и продолжим до пересечения с окружностью  $\omega(O, r)$  в точке  $B$ . Нахождение точки  $C$  сведем к нахождению точки  $B$ , так как, если мы знаем положение точки  $B$ , то сможем найти и точку  $C$ , проводя прямую  $AB$ . Из того, что  $\triangle BOC \sim \triangle AO_1C$ , следует, что  $\angle BOC = \angle AO_1C$ , следовательно, прямые  $OB \parallel AO_1$ . Это в свою очередь позволяет определить прямую  $CO$ . Зная точку  $B$ , легко найти точку  $C$  в пересечении прямой  $AB$  с окружностью  $\omega(O, r)$ .

Из приведенных выше рассуждений делаем вывод, точка  $O_1$  является точкой пересечения прямых  $OC$  и  $l_1$ .

*Построение.*

1. Строим прямую  $l_1$ , такую что  $A \in l_1$  и  $l_1 \perp l$ .
  2. Строим прямую  $l_2$ , такую что  $O \in l_2$  и  $l_2 \parallel l_1$ .
- Пусть  $B = \omega(O, r) \cap l_1$ ,  $C = (AB) \cap \omega(O, r)$ .
3. Построим точку  $O_1$  следующим образом  $O_1 = l_1 \cap OC$ .
  4. Строим окружность  $\omega_1(O_1, r_1)$ ,  $r_1 = O_1A$ .

*Доказательство.*

Докажем, что искомая окружность  $\omega_1(O_1, r_1)$  касается данной окружности и данной прямой в данной точке  $A$ .

а) Из того что  $\triangle OBC \sim \triangle O_1AC$  следует, что  $\frac{O_1A}{OB} = \frac{O_1C}{OC}$ . Значит из того что  $OB = OC$ , следует  $O_1A = O_1C$ , и значит окружности касаются.

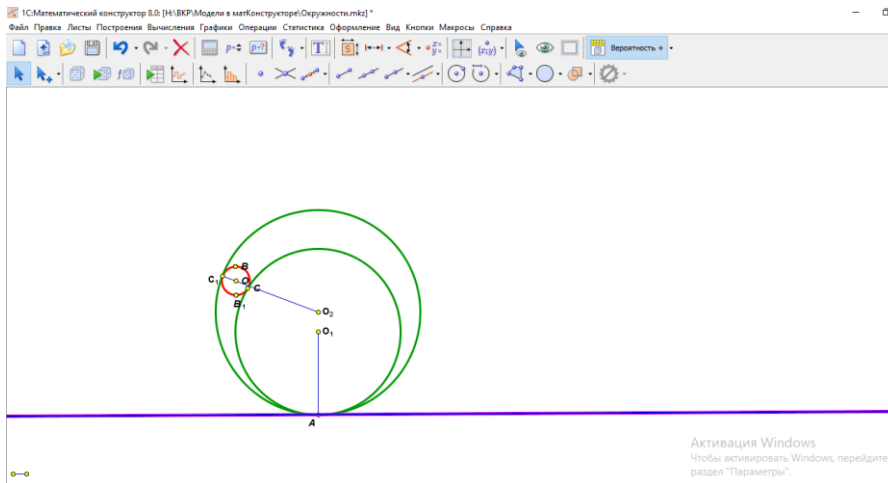
б) Прямая  $l$  перпендикулярна  $O_1A$ , то есть радиусу окружности  $\omega_1(O_1, r_1)$ . Значит, прямая  $l$  является касательной к окружности  $\omega_1(O_1, r_1)$  в точке  $A$ .

*Исследование.*

Этап исследования можно провести опираясь на заранее построенную динамическую модель. Школьники могут не просто предположить наличие возможных решений, убедиться в верности своих рассуждений, но и увидеть на модели, возможно, те случаи о которых они не смогли догадаться самостоятельно.



Рисунок 5.



Если касания окружности внутренние, то точка, к нахождению которой сводится задача, получится, если продолжить прямую  $OB$  в другую сторону до пересечения с окружностью. Таким образом, решение задачи всегда возможно.

Если окружность  $\omega(O, r)$  не пересекает прямую  $l$ , то получаем два решения – внешнее касание и внутреннее (рис.5). Если окружность  $\omega(O, r)$  пересекает прямую  $l$  и точка  $A$  лежит вне окружности, то оба касания – внешние (рис.7). Если окружность  $\omega(O, r)$  пересекает прямую  $l$  и точка  $A$  лежит внутри окружности, то оба касания – внутренние (рис.7).

Рисунок 6.

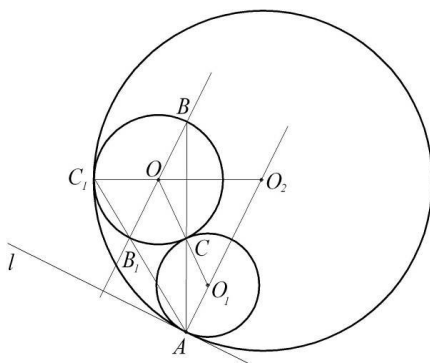
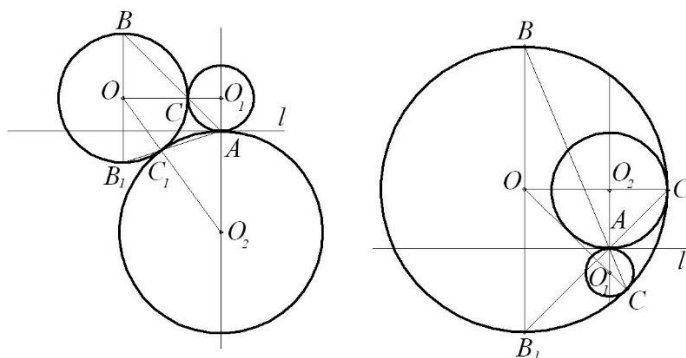


Рисунок 7.



Таким образом, без «1С:Математический конструктор» я смог найти только одну окружность, представленную на рисунке 4. На этапе исследования на помощь пришел «1С:Математический конструктор» и я смог выяснить, что эта задача имеет гораздо больше решений.

Ряд следующих задач мне так же помог решить «1С: Математический конструктор»

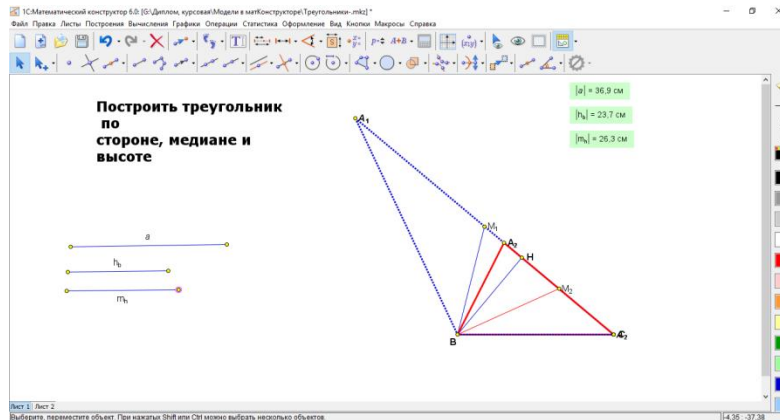
Построить треугольник по заданным стороне  $a$ , высоте  $h_b$  и медиане  $m_b$ . [5]

Решение

Данная задача имеет два решения, когда  $m_b > h_b$ , а так же имеет одно решение если  $m_b = h_b$ . В оставшемся случае задача не имеет решения.

На этапе исследования используя математический конструктор можно наглядно продемонстрировать все условия вариативности ответа задачи (рис.5)

Рисунок 8.

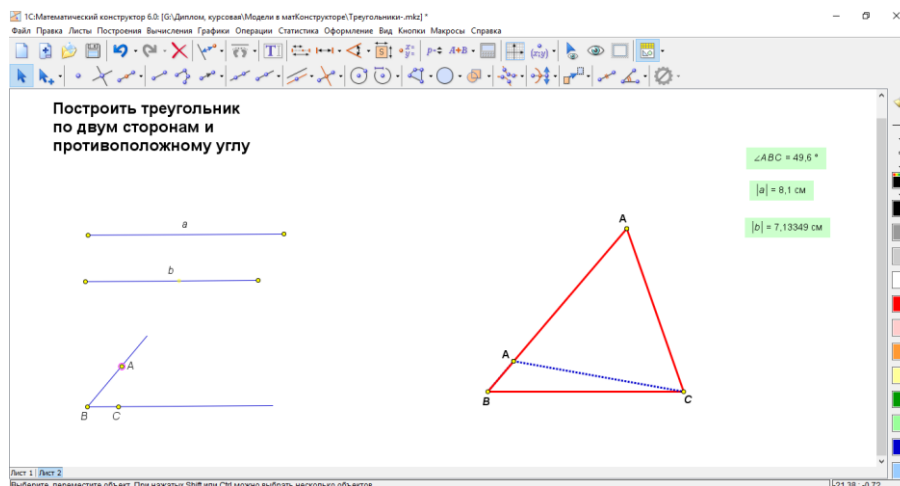


### Пример 2.

Построить треугольник, если заданы стороны  $a, b$  и противолежащий стороне  $b$  угол  $\angle ABC$ .

Работу с данной задачей так же может помочь организовать «Математический конструктор». как и в предыдущем в примере с помощью рассматриваемого программного обеспечения можно в динамике проследить все возможные случаи решения задачи (рис 9).

Рисунок 9.



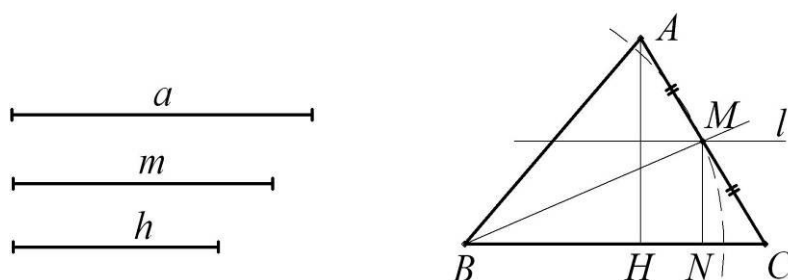
### Пример 3.

Построить треугольник по стороне, высоте, проведенной к ней, и медиане, проведенной к одной из двух других сторон. [5]

Решение. *Анализ.*

Предположим, что  $\triangle ABC$  построен и является искомым (рис. 10): его сторона  $BC = a$ , высота  $AH = h$  и медиана  $BM = t$ .

Рисунок 10.



Построение треугольника  $\triangle ABC$  будет осуществляться совсем просто, если будет построена точка  $M$ . Искомая точка  $M$  должна отстоять от точки  $B$  на данном расстоянии  $m$ . А все точки, удаленные от точки  $B$  на расстоянии  $m$ , лежат на окружности радиуса  $m$  с центром в точке  $B$ . Точка  $M$  лежит также на прямой  $l$ , параллельной прямой  $BC$  и отстоящей от нее на расстоянии  $\frac{h}{2}$ .

Следовательно, искомой точкой будет точка  $M$ , то есть точка пересечения построенной окружности  $\omega(B, m)$  и прямой  $l$ .

*Построение.*

1. Построим  $BC = a$ .
2. Построим окружность  $\omega(B, m)$ .
3. Построим прямую  $l, l \parallel BC, \rho(l, BC) = \frac{h}{2}$ .
4.  $M = \omega(B, m) \cap l$ .
5.  $A = MC \cap (M, MC)$ .

Треугольник  $\triangle ABC$  – искомый.

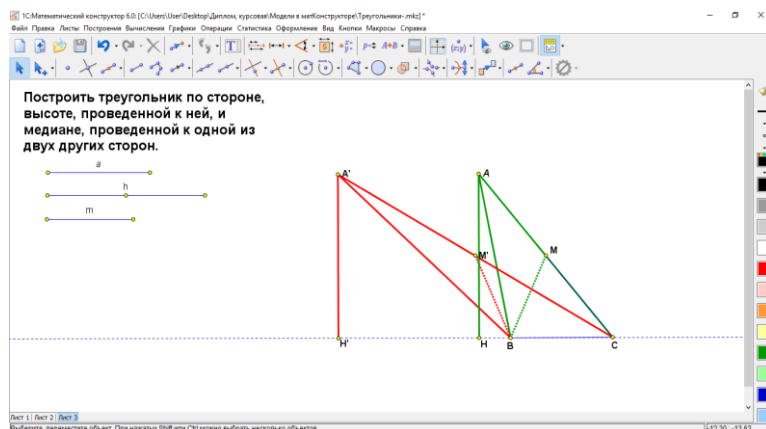
*Доказательство.*

По построению  $BC = a, BC \in \triangle ABC, BM = m$  и  $MC = MA$ . Следовательно, можно сделать вывод,  $BM$  – медиана  $\triangle ABC$ . Высота этого треугольника  $AH = 2MN = 2 \cdot \frac{h}{2} = h$ .

*Исследование.*

Выясним, при каких условиях возможно выполнение указанных построений. Для это можно использовать математический конструктор. Изменяя различные параметры, появляется возможность в динамике проследить выполнимость построения (рис 11).

Рисунок 11.



Очевидно, что первые три шага построения выполнить можно всегда. А вот четвертый шаг, пересечение построенных окружности и прямой, нужно исследовать.

Если  $t > \frac{h}{2}$ , то окружность  $\omega(B, t)$  и прямая  $l$  имеют две точки пересечения. При  $t = \frac{h}{2}$  прямая  $l$  является касательной к окружности  $\omega(B, t)$ .

Таким образом, задача имеет два решения, если  $t > \frac{h}{2}$ ; одно решение при  $t = \frac{h}{2}$ ; нет решений, если  $t < \frac{h}{2}$ .

## 2.2. Применение «1С: Математический конструктор» при решении задач с параметром.

Кроме задач на построение, я смог применить «1С: Математический конструктор» для того, чтобы научиться решать задачи с параметром.

Начал я свою работу с подготовительных задач.

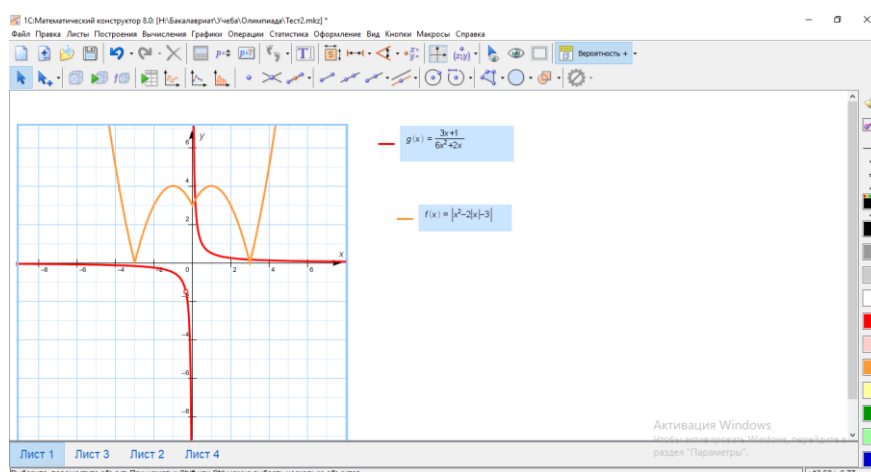
**Задача 1.** Сколько корней имеет следующее уравнение  $\frac{3x+1}{6x^2+2x} = |x^2 - 2|x| - 3|$ .

Решение: Чтобы решить данную задачу, я вспомнил, что если разбить это уравнение на две функции, построить их графики, то точки пересечения и будут его корнями.

$$y = |x^2 - 2|x| - 3|$$

$$y = \frac{3x + 1}{6x^2 + 2x}$$

Рисунок 12.



Ответ: 2 корня

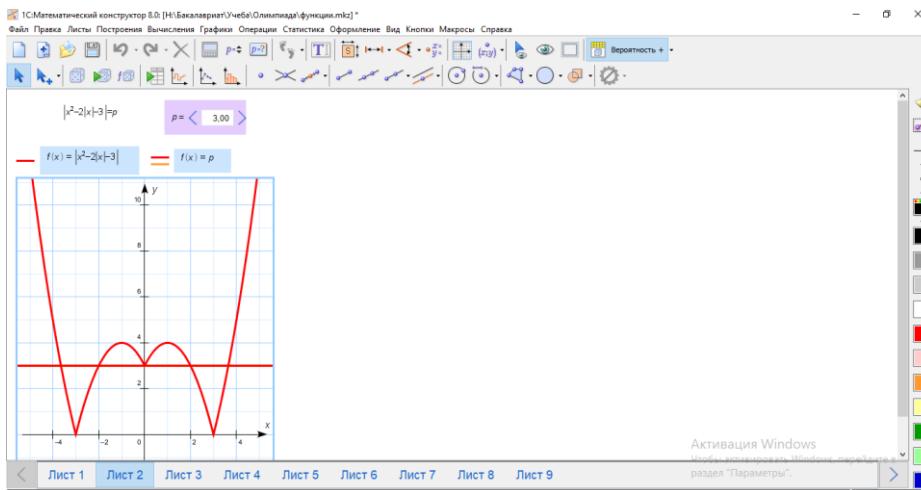
Решив эту задачу, я приступил к следующим задачам, уже с параметром.

**Задача 2.** Сколько корней имеет уравнение  $|x^2 - 2|x| - 3| = p$ , при  $p = 3$ ? [6]

$$y = |x^2 - 2|x| - 3|$$

$$y = p$$

Рисунок 13.



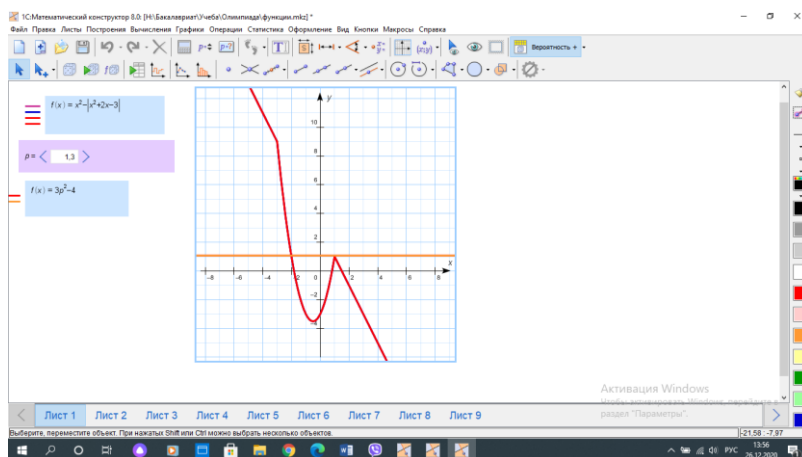
Ответ: 5 корней

**Задача 3.** При каких значениях параметра  $p$  уравнение  $x^2 - |x^2 + 2x - 3| - 3p^2 + 4 = 0$  имеет 3 корня? [6]

$$y = x^2 - |x^2 + 2x - 3|$$

$$y = 3p^2 - 4$$

Рисунок 14.



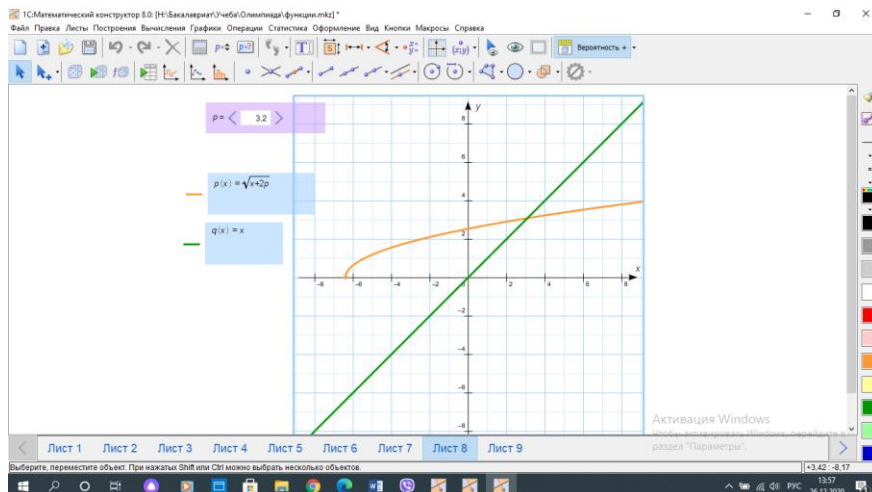
Ответ:  $p \in \left(\sqrt{\frac{1}{6}}; \sqrt{\frac{5}{2}}\right)$

**Задача 4.** При каких значениях параметра  $p$  уравнение  $x - \sqrt{x + 2p} = 0$  не имеет корней? [6]

$$y = x$$

$$y = \sqrt{x + 2p}$$

Рисунок 15.



Прорешав множество таких заданий с помощью «1С: Математический конструктор», я понял, как влияет переменная параметра на различные функции. Чтобы помочь своим одноклассникам понять эти закономерности, я создал следующие задания в рассматриваемой среде.

Рисунок 16.

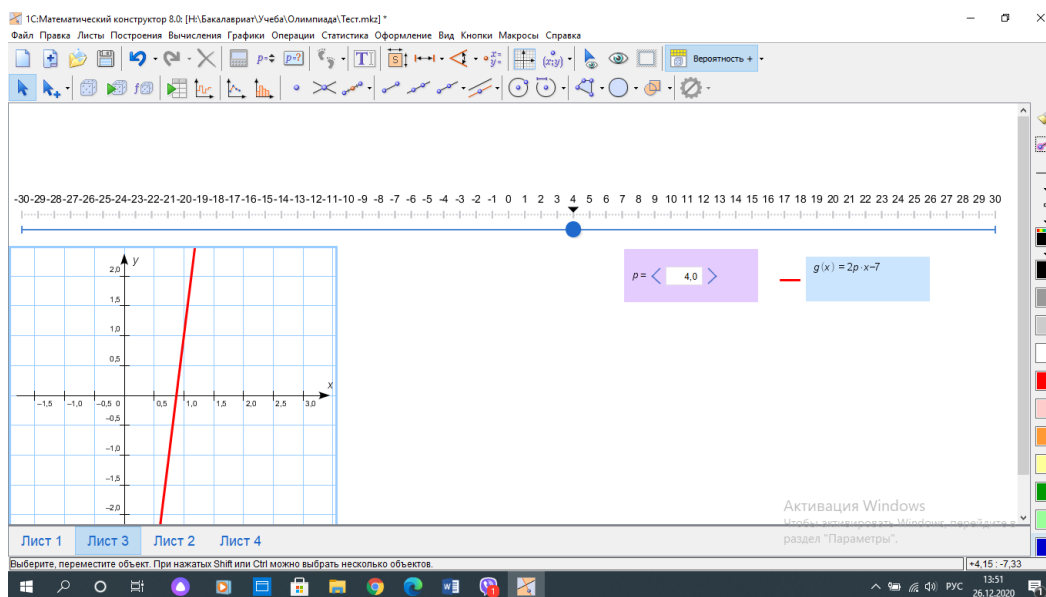


Рисунок 17.

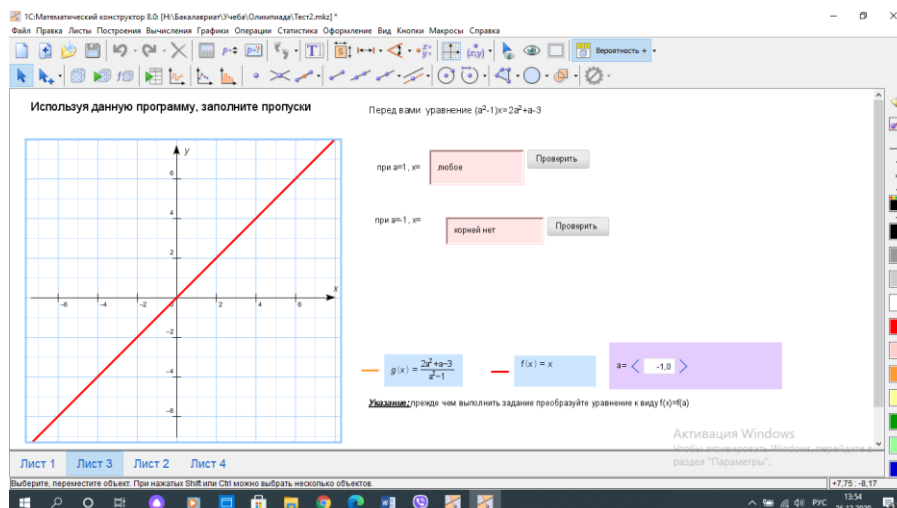
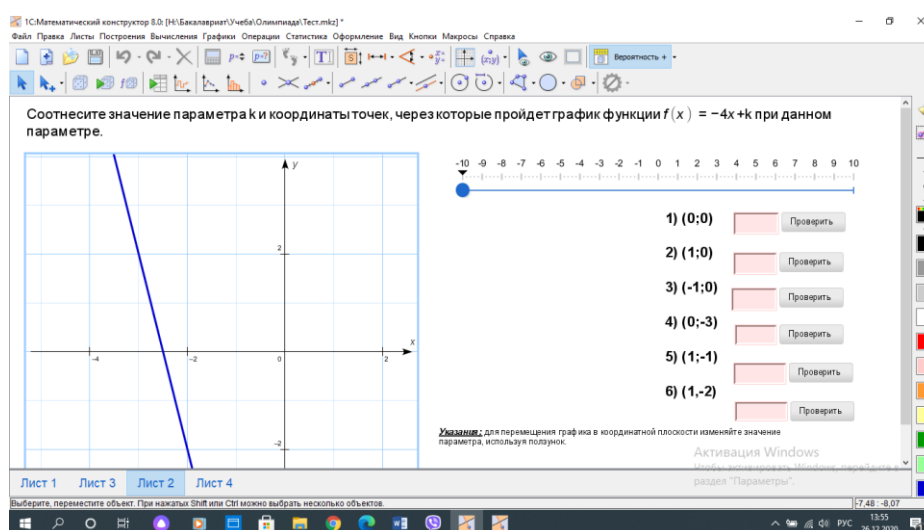


Рисунок 18.



### Выводы:

«1С: Математический конструктор» стал для меня математической лабораторией, в которой очень удобно открывать закономерности решений различных задач повышенной сложности.

1. Программа помогла научиться решать задачи на построение с несколькими возможными решениями. Она позволила мне, благодаря наглядности и динамике чертежей, не упустить ни одного возможного варианта решения.
2. В рассмотренной лаборатории я смог научиться решать задачи с параметрами. Строя графики с параметрами и имея возможность их менять, было очень просто понять, как влияет параметр на ту или иную функцию.
3. Я понял, что могу не только самостоятельно открывать новые знания о различных математических объектах, но и помогать своим одноклассникам в освоении более трудных вопросов.

## Заключение.

«1С: Математический конструктор» – интерактивная творческая компьютерная среда мирового класса, предназначенная для поддержки школьного курса математики. В отличие от чертежа выполненного на бумаге или доске, чертеж, созданный в среде динамической геометрии, – это модель, сохраняющая не только результат построения, но и исходные данные, алгоритм и зависимости между фигурами. При этом все данные легко доступны для изменения (можно перемещать мышью точки, варьировать данные отрезки, вводить с клавиатуры новые значения числовых данных и т.п.). И результат этих изменений тут же, в динамике, виден на экране компьютера. В результате проделанной работы, были изучены и систематизированы знания по следующим темам:

- возможности «1С: Математический конструктор».

- преимущества «1С: Математического конструктора» в сравнении с другими средами динамической геометрии.

Приобретен опыт по применению «1С: Математического конструктора» с целью научиться решать:

- задачи на построение
- задачи с параметрами.

Использование данного материала поможет учащимся, проявляющим интерес к математике, успешно подготовиться к олимпиадам, ОГЭ и ЕГЭ по математике. Возможно использование на элективных курсах.

Таким образом цель достигнута. Планирую дальнейшее изучение «1С: Математический конструктор» и применение его для обучения.

## Литература

1. Фунтиков, Р. А. Обзор и сравнительный анализ динамических сред «Живая математика», «Математический конструктор» и «GeoGebra» / Р. А. Фунтиков. — Текст : непосредственный // Молодой ученый. — 2018. — № 33 (219). — С. 8-11.
2. Бахтина Е.Ю., Крупа Т.В "Творческие конструктивные среды для обучения и разработки" фирма "1С" Математический конструктор.
3. <https://www.geogebra.org/>
4. <https://obr.1c.ru/mathkit/>
5. Прасолов В. В. Задачи по планиметрии: Учебное пособие. — 5-е изд., испр. и доп. — М.: МЦНМО: ОАО «Московские учебники», 2006. — 640 с.
6. <https://math-ege.sdangia.ru/?redir=1>



