Муниципальное бюджетное образовательное учреждение
Лингвистическая гимназия №6

Научно-практическая конференция
школьников г. Пензы «Старт в науку»

Огибающая и ее применение к решению задач

Выполнил: ученик 11 ЛГА класса
Кирилин Вячеслав

Руководитель: Ширяев К.Б.,
учитель математики

г. Пенза, 2020 г.

Содержание

1.Введение

На уроках математики мы решали следующую *математическую задачу:*

Пусть дана линия (например, график функции);

требуется в произвольной точке этой линии построить касательную.

Решение такой задачи может быть выполнено с *помощью производной.*

Интересно, а как решать *обратную задачу:*

Если дано множество прямых, то как построить линию, которая в каждой точке касается прямой из данного семейства?

Меня заинтересовал этот вопрос и я поставил перед собой

Цель работы: *выяснить, как называется линия, для которой каждая прямая из множества будет являться касательной в некоторой ее точке (всегда ли ее можно построить, если есть семейство линий; узнать, какими свойствами она обладает*

и какие задачи можно решить с её помощью).

Объект исследования: *однопараметрические семейства плоских кривых.*

Предмет исследования: *огибающая к однопараметрическим семействам плоских кривых.*

Задачи:

1. *проанализировать источники литературы*
2. *получить ответы на поставленные вопросы*
3. *выполнить решение задач найденным образом*
4. *классифицировать новые знания*

Описание применяемых методов:

- *Работа с учебным текстом*
- *Анализ учебной информации*
- *Самостоятельное решение задач*
- *Самостоятельные сравнение и классификация в области новых знаний*

Основная гипотеза: если в каждой точке *"гладкой"* линии можно построить касательную и создать семейство касательных, то и ко множеству прямых можно построить такую линию, для которой они будут касательными

2.Главная часть

2.1.Основные теоретические положения об огибающих однопараметрических семейств плоских кривых

а) понятие касания кривых

С понятием касания кривых я познакомился в книгах [1] [2].

<u>Определение.</u> Говорят, что две линии, заданные уравнениями $y= f(x)$ и $y=g(x)$ ***касаются в точке*** x_0***,*** если выполнены одновременно два условия:

$$f(x_0) = g(x_0) \text{ и } f'(x_0) = g'(x_0).$$

Геометрически первое условие означает, что линии имеют общую точку с абсциссой x_0, а второе – что касательные к этим линиям в точке x_0 совпадают.

б) семейства плоских кривых и способы их задания

<u>Определение.</u> В книге [1] однопараметрическим ***семейством плоских кривых*** называют множество плоских кривых, заданных уравнением

$F(x;y;\alpha)=0$, где x, y – координаты точки, лежащей на линии, α – параметр.

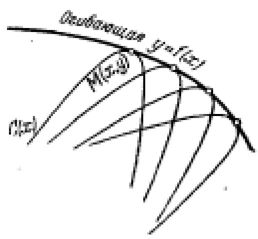
Это значит, что подставляя вместо α число из некоторого заданного промежутка, получим уравнение только с переменными $x, y,$ которое задает линию семейства. Когда параметр α пробегает все значения из промежутка, получим все линии семейства.

в) понятие огибающей семейства плоских кривых

и условия ее существования

В [1] содержится определение понятия *огибающей.*

<u>Определение.</u> ***Огибающей*** однопараметрического семейства плоских кривых называется линия плоскости, которая в каждой своей точке касается какой-либо линии этого семейства.



Оказалось, что существование огибающей можно обнаружить у различных семейств кривых. Именно, в статье [3] я нашел следующую информацию:

«Для *любого* однопараметрического семейства прямых общего положения, т.е. такого семейства, в котором прямые с близкими значениями параметра не параллельны и не проходят по три через одну точку, можно построить огибающую. Более того, огибающая существует не только у семейства *прямых*, но и у *семейства кривых* на плоскости.»

г) способы нахождения уравнения огибающей

семейства прямых и семейства кривых

Анализ книг [1], [2] и статьи [3] позволил обнаружить способы нахождения уравнения ***огибающей*** семейства кривых.

В статье [3] автор анализирует свойства семейств прямых, лежащих в плоскости и приходит к общему способу нахождения огибающей к таким семействам:

Способ 1. Пусть семейство x, y задано так: $F(x, y, \alpha) = 0$, где α – параметр, тогда для получения уравнения огибающей надо

1) *Переписать уравнение семейства в виде уравнения от неизвестного α;*
2) *Составить дискриминант;*
3) *Приравнять дискриминант к нулю;*
4) *Это и будет уравнением огибающей.*

Существенным *условием применимости* **Способа 1** является следующее – уравнение, задающее семейство должно иметь *вторую степень по параметру* α.

Дальнейшее изучение статьи [3] позволяет найти способ нахождения огибающей и для семейств *линий произвольного вида*; если уравнение, задающее семейство, имеет *вторую степень по параметру* α, то способ – в точности такой же, что **способ 1.**

В этой же статье вводится также и способ нахождения огибающей *в самом общем случае* (для любых степеней по параметру α). Для этого используется *частная производная* по параметру *α.*

Способ 2. ***Способ нахождения огибающей с помощью производной***

Пусть семейство x, y задано так: $F(x, y, \alpha) = 0$, где α – параметр, тогда для получения уравнения огибающей надо

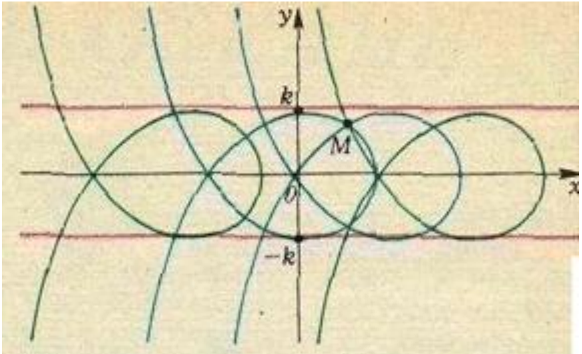
1) Найти частную производную $f'_\alpha(\alpha, x, y)$ и записать два соотношения:
   $f(\alpha, x, y) = 0$ и $f'_\alpha(\alpha, x, y)=0$.
2) Исключить α (то есть найти α из одного соотношения и подставить в другое).
3) Получится уравнение, связывающее *x* и *y* - оно и будет уравнением огибающей.

д) огибающая семейства плоских кривых и дискриминантная кривая

Логика статьи [3] такова: если линия является огибающей, то она обладает свойствами, которые отражены в **способах 1 и 2.** Оказывается, что обратное в данном случае – неверно. Это значит, что если получено уравнение **способом 1 или 2**, то оно *необязательно* задает именно огибающую. В общем случае, получается ***дискриминантная кривая***.

В самом конце статьи [3] содержатся существенные свойства ***дискриминантной кривой:***

Вообще, дискриминантная кривая (если не считать ее «посторонние куски») *отделяет друг от друга области*, через которые проходит разное число линий семейства. Кроме огибающей и «посторонних кусков» дискриминантная кривая может содержать *особые точки линий семейства* (например, точки их самопересечения).



Из изученного мной в [3] вытекает, что необходим еще один шаг – *отделить посторонние точки дискриминантной кривой и оставить только точки огибающей*. Это можно сделать, например, путем *построения нескольких линий семейства* и дискриминантной кривой, а затем *визуально отб*росить те точки дискриминантной кривой, которые не являются точками огибающей. В источниках [1] и [2], дается более строгий (аналитический) способ.

2.2. Самостоятельное решение задач

В статье [3] содержатся *Задачи для самостоятельного решения*. Опираясь на знания, полученные анализом источников информации, я выполнил *самостоятельно решения* этих задач.

Задача 1. Рассматриваются всевозможные прямые $ax + by = 1$, где коэффициенты a, b удовлетворяют условию $a^2 + b^2 = 1$.
Найти огибающую этого семейства прямых.

Решение:

Приведем уравнение семейства к виду, содержащему единственный параметр ***a***:
т.к. $a^2 + b^2 = 1$, *то* $b^2 = 1 - a^2$, $b = \pm\sqrt{1 - a^2}$. Значит

$ax + (\pm\sqrt{1 - a^2}) \cdot y = 1$

$(\pm\sqrt{1 - a^2}) \cdot y = 1 - ax$

Возведем в квадрат

$(1 - a^2) \cdot y^2 = (1 - ax)^2$

$-a^2x^2 + y^2 = 1 - 2ax + a^2x^2$

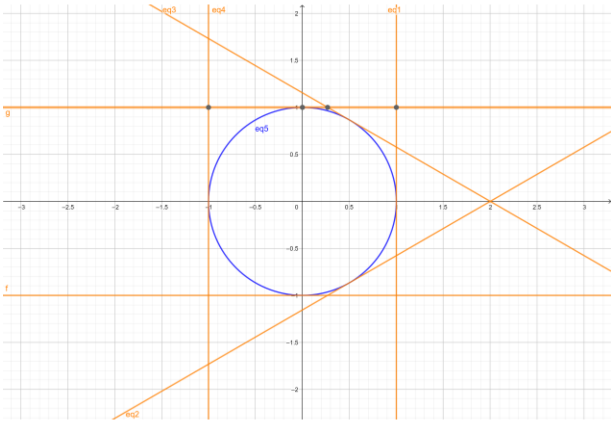
$a^2 \cdot (-y^2 - x^2) + a \cdot (2x) + (y^2 - 1) = 0.$

Получилось уравнение квадратное от ***a***. В соответствии со **способом 1** нахождения огибающей составляем дискриминант и приравниваем его к нулю:

$D = 4x^2 - 4(-y^2 - x^2) \cdot (y^2 - 1) = 0$; выполняем преобразования и получаем:

$4x^2 + (4y^2 + 4x^2) \cdot (y^2 - 1) = 0$

$x^2 + (y^2 + x^2)\cdot(y^2 - 1) = 0$
$x^2 + y^4 - y^2 + x^2 \cdot y^2 - x^2 = 0$
$y^4 - y^2 + x^2 \cdot y^2 = 0$
$y^2(-1 + y^2 + x^2) = 0$
$y = 0$ (ось Ох) или $-1 + y^2 + x^2 = 0$
$y^2 + x^2 = 1$
(окружность с центром с начале координат и радиусом=1).

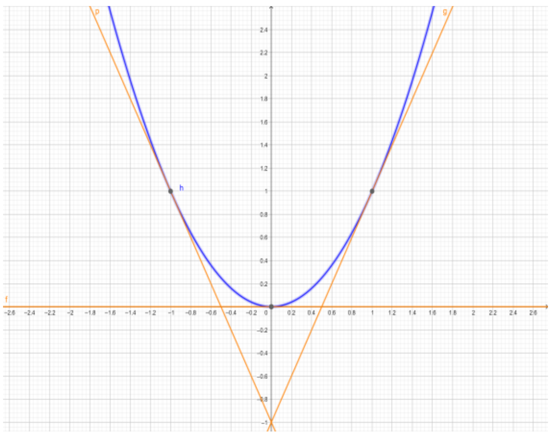


Как доказано в теории полученные линии представляют собой **дискриминантную кривую** - более широкое множество точек, чем огибающая. Докажем, что точки прямой y = 0 не принадлежат огибающей. Пусть точки прямой y = 0 принадлежат огибающей, тогда в каждой точке эта прямая касается какой-либо из прямых исходного семейства. Но прямая может касаться прямой, только если они совпадают , следовательно существует прямая семейства y = 0. Если попробовать получить y = 0 из уравнения семейства при каких-нибудь значениях параметров ***a*** и ***b***, то это не удается. Противоречие доказывает неверность нашего предположения.

Ответ: $y^2 + x^2 = 1$*(окружность с центром с начале координат и радиусом=1).*

Задача 2.

Найдите огибающую семейства прямых
$y = 2\alpha x - \alpha^2$



Решение: $y = 2\alpha x - \alpha^2$. Применяем **Способ 1**. Для этого перепишем уравнение как квадратное от α:

$\alpha^2 - 2\alpha x + y = 0$
$\alpha^2 - (2x)\alpha + y = 0$

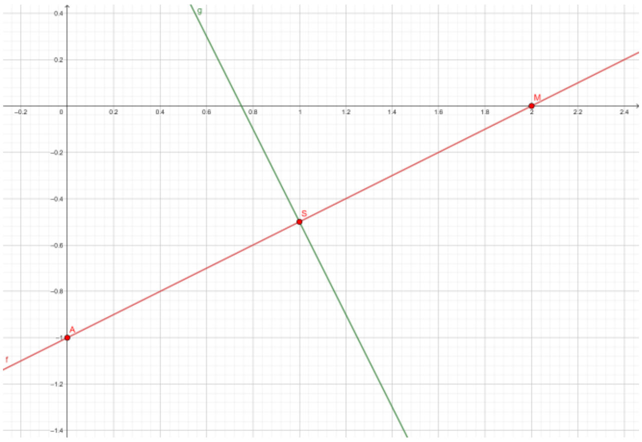
Составляем дискриминант и приравниваем его к нулю:

$D = 4x^2 - 2\cdot 1 \cdot y = 0$
$2(2x^2 - y) = 0$
$2x^2 - y = 0$
$y = 2x^2$

Для проверки, не содержит ли полученное множество точек посторонних точек, выполним рисунок. Видно, что парабола $y = 2x^2$ в каждой точке касается к.-л. линии исходного семейства.

Ответ: $y = 2x^2$

Задача 3.



В плоскости даны прямая d и не принадлежащая ей точка A. Для каждой точки $M \in d$ рассматривается прямая l_m, являющаяся осью симметрии точек A и M. Найти огибающую семейства всех прямых l_m.

Решение:

Построим уравнение, задающее параметрическое семейство линий l_m. Сначала получим уравнение прямой AM

$y = kx + b$

Если (·) $M\ (m;0) \in AM \Rightarrow 0 = km + b$

Если (·) $A\ (0;a) \in AM \Rightarrow a = k \cdot 0 + b;$

$$a = b$$

Тогда получили систему с неизвестными ***k*** и ***b****:*

$$\begin{cases} 0 = km + b \\ a = b \end{cases}$$

Решаем ее: $\begin{cases} 0 = \mathrm{km} + \mathrm{a} \\ \mathrm{b} = \mathrm{a} \end{cases}$

$$\begin{cases} \mathrm{k} = -\frac{a}{m} \\ a = b \end{cases}$$

Тогда уравнение прямой AM имеет вид:

$y = -\frac{a}{m}x + a$

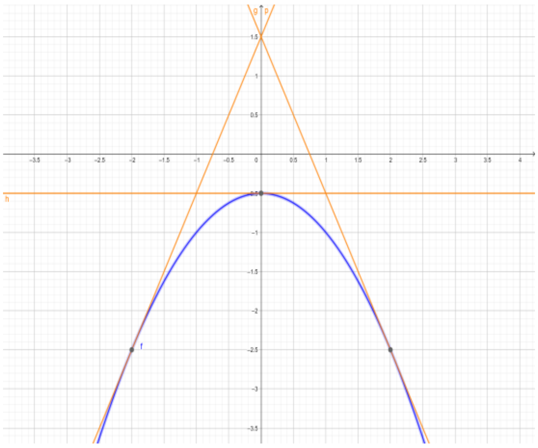
$l_m \perp AM \Rightarrow$ *угловой коэффициент* $= -1 : (-\frac{a}{m}) = \frac{m}{a} \Rightarrow$ уравнение l_m примет вид:

$y = \frac{m}{a}x + b$ (где ***b*** – пока неизвестное число). Далее (·) S $\in l_m \Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{m}{a} \cdot \frac{m}{2} + b;$

$$\frac{a}{2} = \frac{m^2}{2a} + b \Rightarrow b = \frac{a}{2} - \frac{m^2}{2a}.$$

Получилось уравнение l_m: $y = \frac{m}{a}x + \left(\frac{a}{2} - \frac{m^2}{2a}\right)$ семейства с параметром ***m*** (в случае если (·) M совпадает с начальной координатой, то прямая AM совпадает с осью Oy =>
прямая
l_m в этом случае паралельна оси Ox и проходит через точку $\left(0;\frac{a}{2}\right)$;
то есть $\mathrm{y} = \frac{a}{2}$. Легко видеть, что это уравнение получается из уравнения семейства при параметре ***m*** = 0).

Теперь применим **Способ 1** нахождения огибающей к полученному семейству – для этого перепишем полученное уравнение как квадратное относительно параметра ***m***:



$y = \frac{m}{a}x + (\frac{a}{2} - \frac{m^2}{2a})$ домножим на 2a

$2ay = 2mx + a^2 - m^2$

$a^2 - 2ay + 2mx - m^2 = 0$

$-m^2 + m(2x) + (-2ay + a^2) = 0.$

Теперь вычислим дискриминант и приравняем его к нулю: $D = 4x^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-2ay + a^2) = 0;$

$4x^2 + 4 \cdot (-2ay + a^2) = 0$

разделим обе части на 4

$x^2 - 2ay + a^2 = 0$

$-2ay = -x^2 - a^2$

$2ay = x^2 + a^2$ *разделим обе части на 2a, чтобы слева остался y*

$y = \frac{x^2}{2a} + \frac{a^2}{2a}$

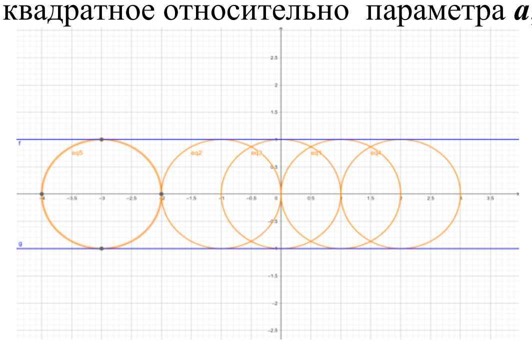
$y = \frac{1}{2a}x^2 + \frac{a}{2}$

$\frac{1}{2a} < 0$ *(т.к. a под осью Ox)*

***Ответ*:** $y = \frac{1}{2a}x^2 + \frac{a}{2}$

Задача 4. Найдите (алгебраически) огибающую семейства линий $(x-a)^2 + y^2 - 1 = 0$ и дайте геометрическое пояснение результата.

Решение: Также как и в предыдущих задачах переписываем уравнение как квадратное относительно параметра ***a***, как требует **Способ 1**:



$(x-a)^2 + y^2 - 1 = 0$

$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 1 = 0$

$a^2 + a(-2x) + x^2 + y^2 - 1 = 0.$

Вычислим дискриминант и приравняем его к нулю:

$D = 4x^2 - 4 \cdot 1 \cdot (x^2 + y^2 - 1) = 0$

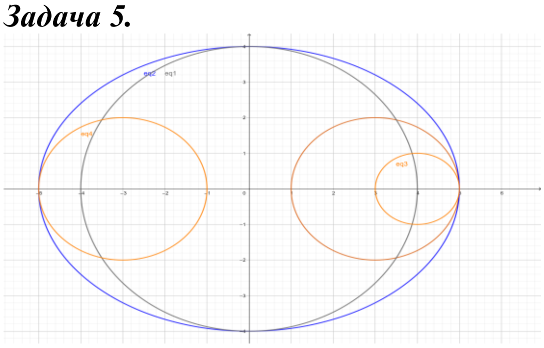
$4x^2 - 4x^2 + 4y^2 - 4 = 0$

$4y^2 = 4$

$y = \pm 1$

Ответ: $y = \pm 1$; см. рисунок: линии семейства – окружности с радиусом =1, центр которых двигается по оси *Ox* при изменении параметра. Огибающая – пара параллельных прямых через точки *(0;1)* и *(0; -1)*.

Задача 5.



Рассматривается семейство окружностей $(x-\alpha)^2 + y^2 = b^2(1 - \frac{\alpha^2}{c^2})$, где *b*, *c* – данные положительные числа, а α – параметр ($|\alpha| \le c$)

Доказать, что огибающей этого семейства является эллипс, описываемый уравнением

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, где $a^2 = b^2+c^2$.

Доказательство:

$(x-\alpha)^2+y^2 = b^2(1-\frac{\alpha^2}{c^2})$ делим на c^2

$c^2(x-\alpha)^2 + c^2\cdot y^2 = c^2\cdot b^2(1-\frac{\alpha^2}{c^2})$

$c^2(x-\alpha)^2 + c^2\cdot y^2 = c^2\cdot b^2\left(\frac{c^2\cdot\alpha^2}{c^2}\right)$ сокращаем c^2

$c^2(x^2-2\alpha x+\alpha^2) + c^2\cdot y^2 = b^2\cdot(c^2-\alpha^2)$

$c^2x^2-2\alpha xc^2+\alpha^2c^2+c^2\cdot y^2-b^2c^2-b^2\alpha^2 = 0$

$\alpha^2(c^2+b^2)-\alpha(2xc^2)+(c^2x^2+c^2y^2-b^2c^2) = 0$

Из условия следует, что $a^2 = b^2+c^2$**.** Значит мы можем упростить выражение, представив c^2+b^2 как a^2**.**

Следовательно, $\alpha^2(a^2)-\alpha(2xc^2)+(c^2x^2+c^2y^2-b^2c^2) = 0$.

Способ 1 нахождения огибающей применим и здесь:

$D = 4x^2c^4-4a^2(c^2x^2+c^2y^2-b^2c^2) = 0$ делим на $4c^2\neq 0$

$x^2c^2-a^2(x^2+y^2-b^2) = 0$

$x^2c^2-a^2x^2-a^2y^2+a^2b^2 = 0$ a и b – числа=> переносим числа в одну сторону, а с неизвестными x и y – в другую.

$x^2(c^2-a^2)-a^2y^2 = -a^2b^2$

$x^2(-b^2)-a^2y^2 = -a^2b^2$ $(a^2 = b^2+c^2)$ делим на $-a^2b^2\neq 0$

$\frac{x^2(-b^2)}{-a^2b^2}+\frac{a^2y^2}{a^2b^2} = 1$ сокращаем и получаем $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$ ***Ч.Т.Д.***

Задача 6.

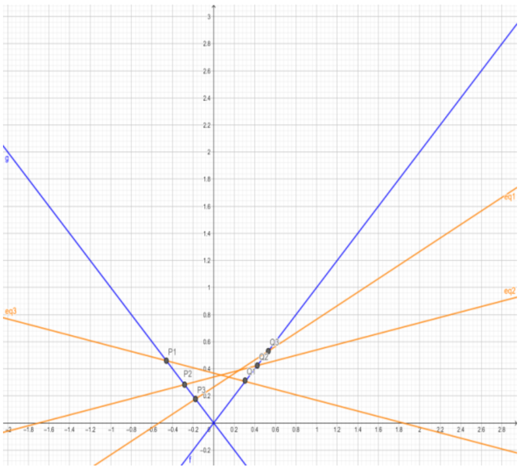
Рассматривается семейство прямых $l(\alpha)$, определяемое уравнением

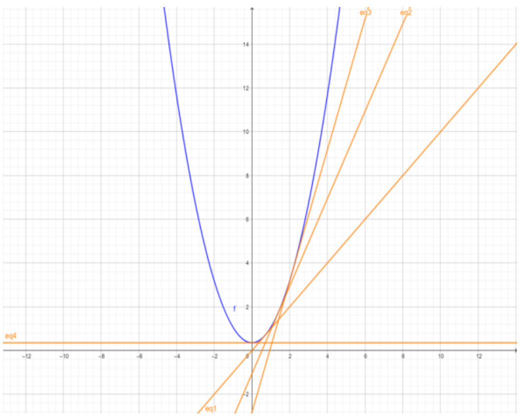
$y-\alpha x+\frac{a}{2\sqrt{2}}(\alpha^2-1) = 0$, где α>0; |α|<1

Найти: ***а)*** точки *P*, *Q* пересечения этой прямой с биссектрисами первого и второго координатных углов и докажите, что *OP*+*OQ* = *a*

б) Найдите огибающую семейства прямых $l(\alpha)$ и убедитесь, что эта огибающая представляет собой дугу параболы

в) Дан прямой угол; рассматриваются всевозможные прямые, отсекающие от этого угла треугольники, у которых сумма длин катетов равна a. Докажите, что огибающая этого семейства прямых представляет собой дугу параболы.





Решение:

а) $P = l(\alpha)\cap$биссектрису 1 четверти)

$Q = l(\alpha)\cap$биссектрису 2 четверти)

Найдем координаты $(\cdot)P$ из системы

$$\begin{cases} y = \alpha x - \frac{a}{2\sqrt{2}}(\alpha^2 - 1) \\ y = x \end{cases}$$

$x = \alpha x - \frac{a}{2\sqrt{2}}(\alpha^2 - 1)$

$x - \alpha x = \alpha x - \frac{a}{2\sqrt{2}}(\alpha^2 - 1)$

$x(1-\alpha) = -\frac{a}{2\sqrt{2}}(\alpha^2 - 1)$

$x = \frac{-\frac{a}{2\sqrt{2}}(\alpha^2-1)}{1-\alpha}$

$x = \frac{\frac{a}{2\sqrt{2}}(\alpha^2-1)}{1-\alpha}$

$x = \frac{\frac{a}{2\sqrt{2}}(1-\alpha)(1+\alpha)}{1-\alpha}$

$x = \frac{a}{2\sqrt{2}}(1+\alpha)$

$y = x = \frac{a}{2\sqrt{2}}(1+\alpha)$, тогда $P\left(\frac{a}{2\sqrt{2}}(1+\alpha); \frac{a}{2\sqrt{2}}(1+\alpha)\right)$.

Аналогично находим $Q\left(-\frac{a}{2\sqrt{2}}(1-\alpha); -\frac{a}{2\sqrt{2}}(1-\alpha)\right)$

Теперь докажем, что, что $OP + OQ = a$:

$O(0; 0)$; $P\left(\frac{a}{2\sqrt{2}}(1+\alpha); \frac{a}{2\sqrt{2}}(1+\alpha)\right)$, тогда по формуле расстояния между точками $OP = \sqrt{\left(\frac{a}{2\sqrt{2}}(1+\alpha)\right)^2 + \left(\frac{a}{2\sqrt{2}}(1+\alpha)\right)^2} =$

$= \sqrt{\frac{a^2}{8}(1+\alpha)^2 + \frac{a^2}{8}(1+\alpha)^2} = \sqrt{2\left(\frac{a^2}{8}(1+\alpha)^2\right)} = \sqrt{\left(\frac{a^2}{4}(1+\alpha)^2\right)} = \frac{a}{2}(1+\alpha)$;

$OQ = \sqrt{\left(-\frac{a}{2\sqrt{2}}(1-\alpha)\right)^2 + \left(-\frac{a}{2\sqrt{2}}(1-\alpha)\right)^2} = \frac{a}{2}(1-\alpha)$ и получаем

$OP + OQ = \frac{a}{2}(1+\alpha) + \frac{a}{2}(1-\alpha) = \frac{a}{2} + \frac{\alpha a}{2} + \frac{a}{2} - \frac{\alpha a}{2} = \frac{2a}{2} = a$

б) Найдем уравнение огибающей (**Способ 1**):

$y - \alpha x + \frac{a}{2\sqrt{2}}(\alpha^2 - 1) = 0$ умножим на $2\sqrt{2}$

$2y\sqrt{2} - 2\,\alpha x\sqrt{2} + \alpha^2 a - a = 0$

$\alpha^2(a) - \alpha(2x\sqrt{2}) + (2y\sqrt{2} - a) = 0$

2) $D = 8x^2 - 4a(2y\sqrt{2} - a) = 0$

$2x^2 - 2ay\sqrt{2} + a^2 = 0$

$-2ay\sqrt{2} = -2x^2 - a^2$

$y = \frac{-2x^2 - a^2}{-2a\sqrt{2}}$

$y = \frac{1}{a\sqrt{2}}x^2 + \frac{a^2}{2\sqrt{2}}$

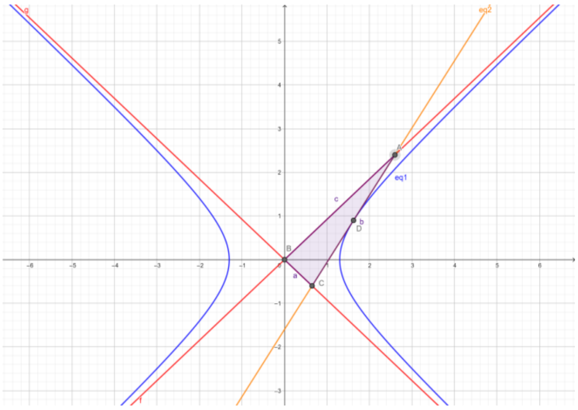
в) Введем систему координат, так чтобы начало совпало с вершиной прямого угла, а стороны прямого угла были биссектрисами 1-го и 2-го координатного углов. Тогда по условию гипотенуза = a. Значит прямая, содержащая гипотенузу, принадлежит семейству $l(\alpha)$. Применяя результаты нашего исследования под ***а)*** и ***б)***, заключаем, что огибающей будет парабола $y = \frac{1}{a\sqrt{2}}x^2 + \frac{a^2}{2\sqrt{2}}$.

Задача 7.

Рассматривается семейство прямых $l(\alpha)$, определяемое уравнением

$$bx(1+\alpha^2) + ay(1-\alpha^2) - 2\alpha ab = 0$$

Найти: ***а)*** точки P, Q пересечения этой прямой с прямыми $y = \frac{bx}{a}$, $y = -\frac{bx}{a}$ и



докажите, что $OP \cdot OQ = a^2 + b^2$, $S_{OPQ} = ab$

б) Докажите, что огибающей семейства прямых $l(\alpha)$ является гипербола, описываемая уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

в) Прямые $y = \frac{bx}{a}$, $y = -\frac{bx}{a}$ называются асимптотами указанной гиперболы; докажите, что произвольная касательная к гиперболе определяет вместе с асимптотами треугольник постоянной площади $S = ab$.

Решение:

а)

$$bx(1+\alpha^2) + ay(1-\alpha^2) - 2\alpha ab = 0$$

Ищем координаты точек P, Q: выразим y через x из уравнения прямой $l(\alpha)$:

$$ay(1-\alpha^2) = 2\alpha ab - bx(1+\alpha^2)$$

$$y = \frac{2\alpha ab}{a(1-\alpha^2)} - \frac{bx(1+\alpha^2)}{a(1-\alpha^2)}$$

$$y = \frac{\mathrm{b}(2\alpha\mathrm{a} - \mathrm{x} - \alpha^2\mathrm{x})}{\mathrm{a}(1-\alpha^2)}.$$

Точка Q – точка пересечения прямых $l(\alpha)$ и $y = -\frac{bx}{a}$, поэтому для определения ее координат решим систему:

$$\begin{cases} y = \frac{b(2\alpha a - x - \alpha^2 x)}{a(1-\alpha^2)} \\ y = -\frac{bx}{a} \end{cases} \quad \text{отсюда} \quad -\frac{bx}{a} = \frac{\mathrm{b}(2\alpha\mathrm{a} - \mathrm{x} - \alpha^2\mathrm{x})}{\mathrm{a}(1-\alpha^2)} \quad \text{умножаем на } a(1-\alpha^2)$$

$$-bx(1-\alpha^2) = b(2\alpha a - x - \alpha^2 x)$$

Путем преобразования, получаем:

$$x = \frac{a}{\alpha}$$

$$y = -\frac{bx}{a}$$

$$y = -\frac{b \cdot \frac{a}{\alpha}}{a}$$

$$y = -\frac{b}{\alpha}.$$

Т. о. $Q\left(\frac{a}{\alpha}; -\frac{b}{\alpha}\right)$. Аналогично ищем координаты точки P из системы:

$$\begin{cases} \mathrm{y} = \frac{\mathrm{b}(2\alpha\mathrm{a} - \mathrm{x} - \alpha^2\mathrm{x})}{\mathrm{a}(1-\alpha^2)} \\ \mathrm{y} = \frac{bx}{a} \end{cases} \quad \text{и получаем} \quad x = a\alpha; \quad y = \alpha b.$$

Т. о. $P\,(a\alpha; \alpha b)$.

Теперь легко получаем, что $OP \cdot OQ = a^2 + b^2$, т.к.

$$OP = \sqrt{a^2\alpha^2 + b^2\alpha^2} = \alpha\sqrt{a^2 + b^2}$$

$$OQ = \sqrt{\frac{a^2}{\alpha^2} + \frac{b^2}{\alpha^2}} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\alpha}$$

$$OP \cdot OQ = \frac{\alpha\sqrt{a^2+b^2}}{1} \cdot \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\alpha} = a^2 + b^2$$

б) Применим **Способ 1** для поиска огибающей:

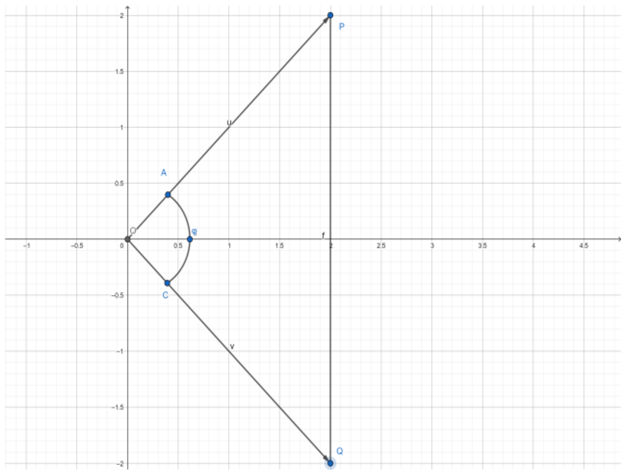
$$bx(1+\alpha^2) + ay(1-\alpha^2) - 2\alpha ab = 0$$

$$bx + \alpha^2 bx + ay - \alpha^2 ay - 2\alpha ab = 0$$
$$\alpha^2(bx - ay) - \alpha(2ab) + (bx + ay) = 0$$
$$D = 4a^2b^2 - 4(bx - ay)(bx + ay) = 0$$
$$a^2b^2 - (bx)^2 + (ay)^2 = 0$$

$-b^2x^2 + a^2y^2 = -a^2b^2$ разделим на $-a^2b^2$ и упростим. Получится уравнение гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$

в) *P (aα; αb);*

$Q\left(\frac{a}{\alpha}; -\frac{b}{\alpha}\right)$



$Cos\ \varphi = \frac{\text{вектор } OP \cdot \text{вектор} OQ}{\text{вектор } |OP| \cdot \text{вектор} |OQ|}$

$OP \cdot OQ = a\alpha \cdot \frac{a}{\alpha} + \alpha b \cdot \left(-\frac{b}{\alpha}\right) = a^2 - b^2$

$Cos\ \varphi = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$

$Sin^2\ \varphi + cos^2\ \varphi = 1$

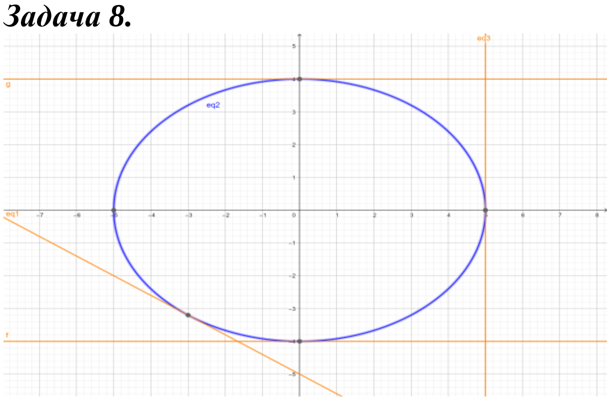
$Sin^2\varphi = 1 - \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\right)^2$

Упрощаем и получаем

$Sin\ \varphi = \frac{2ab}{a^2 + b^2}$

Площадь треугольника POQ $= \frac{1}{2} \cdot OP \cdot OQ \cdot Sin\ \varphi = \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha\sqrt{a^2+b^2}}{1} \cdot \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\alpha} \cdot \frac{2ab}{a^2+b^2} = ab$ ***ч.т.д.***

Задача 8.



Рассматривается прямая $l(\alpha)$, определяемые уравнением $bx(\alpha^2 - 1) + 2\alpha ay + ab(\alpha^2 + 1) = 0$, где a, b – заданные положительные числа; а α – параметр.

Доказать, что огибающей семейства $l(\alpha)$является эллипс, описываемый уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, где $a^2 = b^2 + c^2$

Доказательство: Применяем **Способ 1** нахождения огибающей:

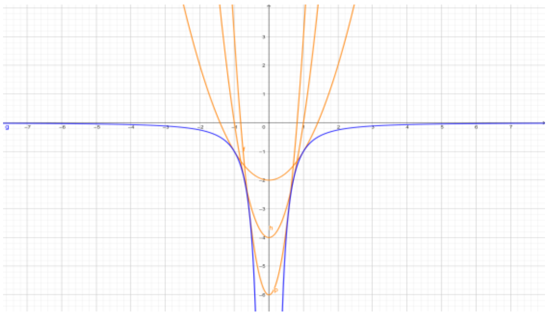
$$bx(\alpha^2 - 1) + 2\alpha ay + ab(\alpha^2 + 1) = 0$$
$$\alpha^2 bx - bx + 2\alpha ay + \alpha^2 ab + ab = 0$$
$$\alpha^2(bx + ab) - \alpha(2ay) + (ab - bx) = 0$$
$$D = 4\alpha^2y^2 - 4(bx + ab)(ab - bx) = 0$$
$$\alpha^2y^2 - (ab + bx)(ab - bx) = 0$$

$\alpha^2y^2 - \alpha^2b^2 + b^2x^2 = 0$ *делим на* α^2b^2

$\frac{\alpha^2y^2}{\alpha^2b^2} + \frac{b^2x^2}{\alpha^2b^2} = \frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1.$ ***Ч.Т.Д.***

Задача 9.

Найти огибающую семейства парабол $y = \alpha^2x^2 - 2\alpha$ (где α - параметр). Сделайте чертеж.



Решение: $y = \alpha^2 x^2 - 2\alpha$

Переписываем уравнение $\alpha^2 x^2 - 2\alpha - y = 0$

Применяем **Способ 1:** D = 4 $-4x^2(-y) = 0$

$4x^2 y = -4$ делим на (- 4)

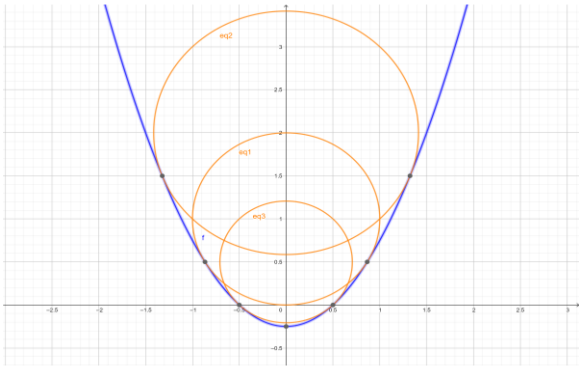
$-x^2 y = 1$

y = $-\frac{1}{x^2}$

Ответ: y = $-\frac{1}{x^2}$; см. рис.

Задача 10.

Найти огибающую семейства окружностей $x^2 + (y-\alpha)^2 = \alpha$, где α – параметр. Сделайте чертеж.



Решение: в этой задаче тоже применим **Способ 1**:

$x^2 + (y-\alpha)^2 = \alpha$

$x^2 + y^2 - 2\alpha y + \alpha^2 - \alpha = 0$

$\alpha^2 - \alpha(2y+1) + x^2 + y^2 = 0$

D = $(2y+1)^2 - 4(x^2+y^2)$ = 0

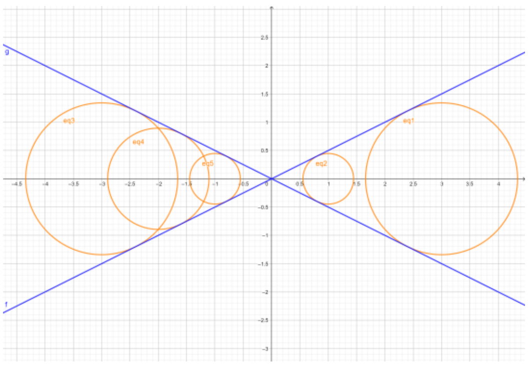
Путем преобразований получаем:

y = $x^2 - \frac{1}{4}$

Ответ: y = $x^2 - \frac{1}{4}$

Задача 11.

Найти огибающую семейства окружностей $(x-\alpha)^2 + y^2 = \frac{\alpha^2}{5}$



Решение: как и в предыдущих задачах

$$(x-\alpha)^2+y^2=\frac{\alpha^2}{5}$$

$(x-\alpha)^2+y^2-\frac{\alpha^2}{5}=0$ умножим на 5

$5(x^2-2\alpha x+\alpha^2)+5y^2-\alpha^2=0$

Раскрываем скобки, упрощаем, приводим к виду квадратного трехчлена.

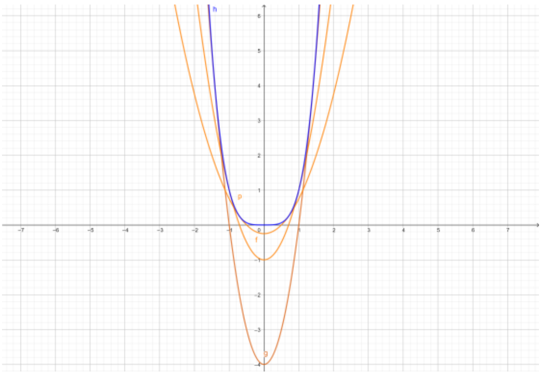
$\alpha^2(4)-\alpha(10x)+(5x^2+5y^2)=0$

$D=100x^2-16(5x^2+5y^2)=0$

$$y^2=\frac{x^2}{4}$$

Ответ: $y^2=\frac{x^2}{4}$

Задача 12.



Найти огибающую семейства парабол $y=2\alpha x^2-\alpha^2$. Сделайте чертеж.

Решение: Работаем в соответствии со **способом 1**:

$y=2\alpha x^2-\alpha^2$

$\alpha^2-\alpha(2x^2)+y=0$

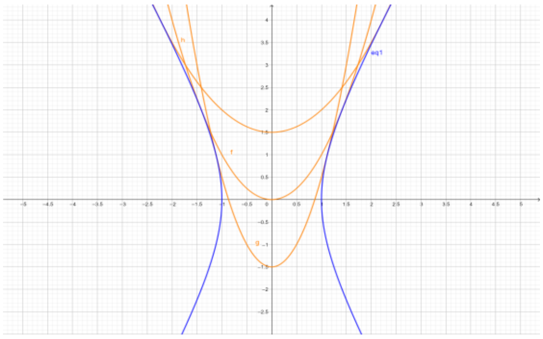
$D=4x^4-4y=0$ делим на 4

$x^4-y=0$

$y=x^4$

Ответ: $y=x^4$

Задача 13.



Найти огибающую семейства парабол $y=\alpha x^2+(\frac{1}{\alpha}-\alpha)$

Сделайте чертеж.

Решение:

1) $y=\alpha x^2+(\frac{1}{\alpha}-\alpha)$

$\alpha x^2+\frac{1}{\alpha}-\alpha-y=0$ Умножаем на α

$\alpha^2x^2+1-\alpha^2-\alpha y=0$

$\alpha^2(x^2-1)-\alpha(y)+1=0$

2) $D=y^2-4x^2+4=0$

$y^2-4x^2=-4$ Разделим обе части на -4

$\frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{4}=1$

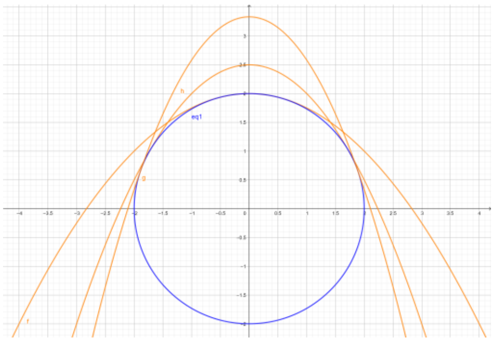
Ответ: $\frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{4}=1$

Задача 14.

Найти огибающую семейства парабол

$$y=-\frac{\alpha x^2}{4}+(\alpha+\frac{1}{\alpha})$$

Сделайте чертеж.



Решение:

1) $y = -\frac{\alpha x^2}{4} + (\alpha + \frac{1}{\alpha})$

$\frac{\alpha x^2}{4} - \alpha - \frac{1}{\alpha} + y = 0$ умножаем обе части на 4α, чтобы избавиться от знаменателей

$\alpha^2 x^2 - 4\alpha^2 - 4 + 4\alpha y = 0$

$\alpha^2(x^2 - 4) + \alpha(4y) - 4 = 0$

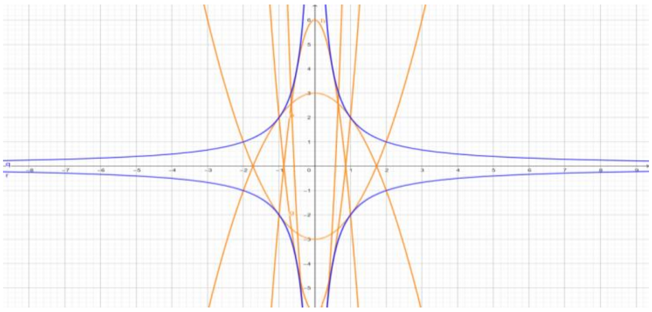
D = $16y^2 + 16(x^2 - 4) = 0$

$16y^2 + 16x^2 = 64$

$y^2 + x^2 = 4$ окружность с центром в точке (0; 0) и радиусом = 2

Ответ: $y^2 + x^2 = 4$

Задача 15. Найти огибающую семейства парабол $y = \alpha^3 x^3 - 3\alpha$. Сделайте чертеж



Решение:

В отличие от предыдущих задач, в которых семейство линий задавалось *уравнением 2-й степени относительно параметра*, здесь это не так; *параметр имеет 3-ю степень*. Поэтому применить первый из методов построения уравнения огибающей – невозможно. Применим **2-й (универсальный) способ:**

Составляем систему из двух уравнений - из данного в условии и его частной производной по параметру α:

$$\begin{cases} f(x, y, \alpha) = \alpha^3 x^3 - 3\alpha - y = 0 \\ f'_\alpha(x, y, \alpha) = x^2 \cdot 3\alpha^2 - 3 = 0 \end{cases}$$

Преобразуем второе уравнение: разделим на 3

$x^2\alpha^2 = 1$ и выразим из него параметр α:

α = $\pm\frac{1}{x}$.

Подставляем в первое уравнение полученное значение параметра

$(\pm\frac{1}{x})^3 x^2 - 3\left(\pm\frac{1}{x}\right) - y = 0$

$\pm\frac{1}{x^3} \cdot \frac{x^2}{1} \mp \frac{3}{x} - y = 0$

$\pm\frac{1}{x} \mp \frac{3}{x} = 0$ получаем два уравнения

(1) $y = \frac{1}{x} - \frac{3}{x}$ (2) $y = -\frac{1}{x} + \frac{3}{x}$

$y = -\frac{2}{x}$ $\qquad\qquad\qquad$ $y = \frac{2}{x}$

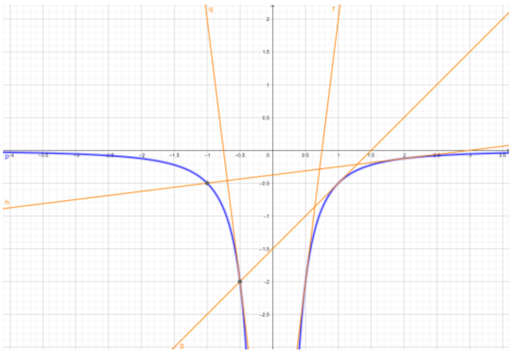
Ответ:$y = \pm\frac{2}{x}$

Задача 16

Найти огибающую семейства прямых

$y = \alpha^3 x - \frac{3\alpha^2}{2}$.

Сделайте чертеж.



Решение: как и в ***задаче 15*** применим **2-й способ** нахождения уравнения огибающей:

$$\begin{cases} f(x,y,\alpha) = \alpha^3 x - \dfrac{3\alpha^2}{2} = 0 \\ f'_\alpha(x,y,\alpha) = 3\alpha^2 x - 3\alpha = 0 \end{cases}$$

Преобразуем второе уравнение

$3\alpha^2 x - 3\alpha = 0$

$\alpha^2 x - \alpha = 0$ и выразим из него параметр α.

Случай 1: α = 0, следовательно, *y = 0* (ось *Ox*)

Случай 2: $\alpha^2 x - \alpha = 0$

$\alpha = \frac{1}{x}$.

Подставляем полученное значение параметра в первое уравнение

$$(\frac{1}{x})^3 x - \frac{3(\frac{1}{x})^2}{2} = 0$$

Приводим к общему знаменателю, упрощаем и получаем:

$y = -\frac{1}{2x^2}$ (гипербола, в 3 и 4 четверти)

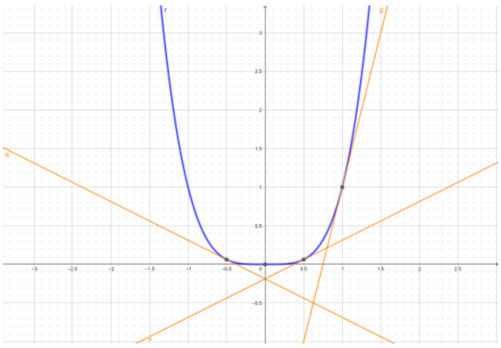
Ответ:$y = -\frac{1}{2x^2}$

Задача 17.

Найти огибающую семейства прямых

$y = 4\alpha^3 x - 3\alpha^4$.

Сделайте чертеж.



Решение:

Применим **2-й способ** нахождения уравнения огибающей:

$$\begin{cases} f(x,y,\alpha) = 4\alpha^3 x - 3\alpha^4 = 0 \\ f'_\alpha(x,y,\alpha) = 12\alpha^3 x - 12\alpha^3 = 0 \end{cases}$$

Преобразуем второе уравнение

$\alpha^3 x - \alpha^3 = 0$ Вновь имеем два случая:

Случай 1: α = 0, следовательно, *y = 0* (ось *Ox*)

Случай 2: $\alpha^3 x - \alpha^3 = 0$

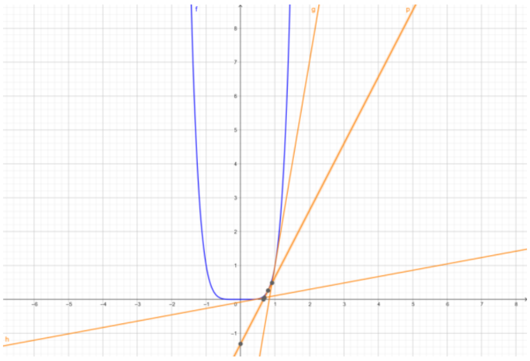
$$x - \alpha = 0$$

$x = \alpha$, следовательно, $4x^3 x - 3x^4 = 0$

$$y = x^4$$

Ответ: $y = 0; y = x^4$

Задача 18



Найти такое семейство прямых, огибающей которого служит линия $y = x^6$.

Решение:

Эта задача – обратная по отношению к некоторым предыдущим.

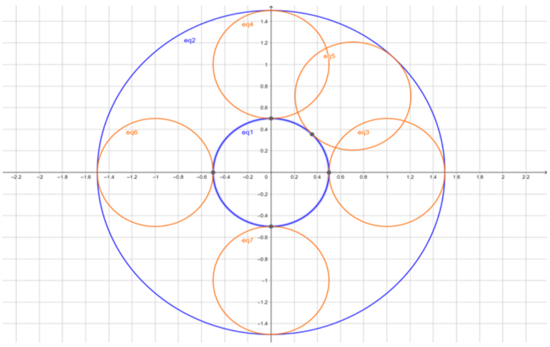
Пусть *M* (0; α^6) – точка касания. Если *M* “движется” по параболе, то меняется α - примем α за параметр. Запишем уравнение касательной к графику в точке *M*:

$y' = 6x^5$, поэтому $y = \alpha^6 + 6\alpha^5(x - \alpha)$,

$y = 6\alpha^5 x - 5\alpha^6$. Значит, это и есть уравнение семейства прямых (с переменными α, $y, x,$ где α $-$ параметр).

Ответ: $y = 6\alpha^5 - 5\alpha^6$

Задача 19.



Найти огибающую семейства окружностей $(x - cos\alpha)^2 + (y - sin\alpha)^2 = \frac{1}{4}$.

Сделайте чертеж.

Решение:

Как и в ***задачах 16 и 17*** применим 2-й способ нахождения уравнения огибающей:

$$\begin{cases} f(x,y,\alpha) = (x - cos\alpha)^2 + (y - sin\alpha)^2 - \frac{1}{4} \\ f'_\alpha(x,y,\alpha) = (2(x - cosa)sin\alpha) + \big(2(y - sin\alpha)(-cos\alpha)\big) = 0 \end{cases}$$

Преобразуем и упрощаем второе уравнение:

$xsin\alpha - ycos\alpha = 0$

$\frac{y}{x} = \frac{sin\alpha}{cos\alpha}$

$\frac{y}{x} = tg\alpha$

Выразим $\cos^2\alpha$ через $tg\alpha$:

$1 + tg^2\alpha = \frac{1}{cos^2\alpha}$

$1 + (\frac{y}{x})^2 = \frac{1}{cos^2\alpha}$

Приводим к общему знаменателю, упрощаем

$\cos\alpha = \pm\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Аналогично

$\sin\alpha = \pm\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Упростим первое уравнение системы:

$(x^2 - 2xcos\alpha + cos^2\alpha) + (y^2 - 2ysin\alpha + sin^2\alpha) - \frac{1}{4} = 0$

$x^2 - 2xcos\alpha + y^2 - 2ysin\alpha + \frac{3}{4} = 0$

Легко видеть, что знак $\cos\alpha$ совпадает со знаком x; знак $\sin\alpha$ со знаком y, а знаменатель всегда положительный, поэтому достаточно взять $cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$sin\alpha = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Подставляем результат в упрощенное первое уравнение системы:

$x^2 - 2\left(x\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + y\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) + y^2 + \frac{3}{4} = 0$

Приводим к общему знаменателю, упрощаем

$x^2 + y^2 - 2\sqrt{x^2+y^2} + \frac{3}{4} = 0$

путем замены переменной:

$\sqrt{x^2+y^2} = t$

$t^2 - 2t + \frac{3}{4} = 0$

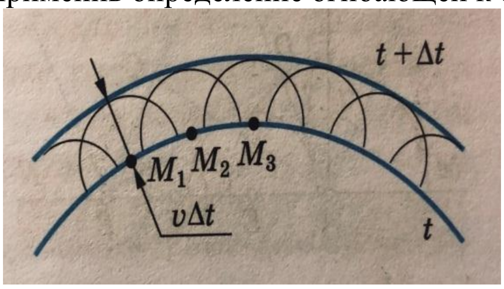
$t_1 = \frac{3}{2}$

$t_2 = \frac{1}{2}$.

Возврат к переменным y, x дает:

$\sqrt{x^2+y^2} = \frac{3}{2}$	$\sqrt{x^2+y^2} = \frac{1}{2}$
$x^2 + y^2 = \frac{9}{4}$	$x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$
Окружность с центром (0; 0) и $R = \frac{3}{2}$	Окружность с центром (0; 0) и $R = \frac{1}{2}$

Замечу, что эти огибающие можно увидеть и построить, *глядя* на семейство и применив определение огибающей к семейству плоских кривых.



Эта задача допускает *физическую интерпретацию*: в соответствии с *принципом Гюйгенса-Френеля (см. [5]) каждая точка волнового фронта является источником вторичных волн*. Для того чтобы, зная положение фронтовой поверхности (фронта волны) в момент времени t, найти ее положение в следующий момент времени $t + \Delta t$, нужно каждую точку фронта рассматривать как источник вторичных волн. Точки M_1, M_2, M3 и т. д. являются такими источниками. Поверхность, *огибающая* к фронтам вторичных волн, представляет собой фронт первичной волны в следующий момент времени (см. рис.). Этот принцип в равной мере пригоден для описания распространения волн любой природы: механических, световых и т. д.

В данной задаче окружность с центром (0; 0) и радиусом = 1 можно считать волновым фронтом в момент времени *t*, тогда каждая точка на ней является источником вторичных волн. Тогда линии семейства можно считать волновыми фронтами вторичных волн, порожденными этими точками. В нащем случае мы строили огибающую в момент времени, когда радиус окружности вторичной волны = ¼

Ответ: $x^2 + y^2 = \frac{9}{4}$; $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$;

3.Заключение

3.1.а) Основные результаты исследования

В процессе выполнения данной работы я *смог достичь* поставленной *цели*, *выполнил* все *поставленные задачи*. *Гипотеза подтвердилась*.

3.1.б) Самостоятельная классификация методов нахождения огибающих

На основе анализа источников предлагаю *следующую классификацию*.

Методы нахождения огибающих

графические

Задача 19

аналитические

без использования производной

Пусть семейство x, y задано *F(x, y, α)=0*

1) Переписать уравнение семейства в виде уравнения от неизвестного α
2) Составить дискриминант
3) Приравнять его к нулю
4) Выполнить графическую проверку

Замечание: уравнение, задающее семейство должно иметь вторую степень по α.

Задачи 1 - 14

с использованием производной

Пусть семейство x, y задано *F(x, y, α)=0*

1) Найти частную производную $f'_\alpha(\alpha, x, y)$ и записать два соотношения: $f(\alpha, x, y) = 0$ и $f'_\alpha(\alpha, x, y)=0$.
2) Исключить α (то есть найти α из одного соотношения и подставить в другое).
3) Выполнить графическую проверку

Задачи 15 – 19

3.1.в) Самостоятельная классификация типов задач

на применение огибающей

В процессе проведенной работы мне удалось успешно *решить различные типы задач,* в которых применяются добытые из источников информации знания

Некоторые типы задач
(решаемые с применением понятия огибающей)

найти уравнение огибаюшей заданного семейства линий	**найти семейство линий по данному уравнению огибающей**	**найти уравнение линии по заданным свойствам касательных к ней**	**физические задачи (оптика)**
Задачи 1 – 5, 8 - 17	*Задача 18*	*Задачи 6,7*	*Задача 19*

3.2)Кому это важно?

Результаты проделанной работы обогатили мои знания по математике.

Рассмотрение задач из оптики и акустики позволили увидеть *связи* между математикой и физикой.

Данная работа будет иметь значение также *при подготовке к олимпиадам* по математике.

4.Список использованной литературы

1. П. К. Рашевский «Курс дифференциальной геометрии», 1950 г.
2. Г. М. Фихтенгольц «Курс дифференциального и интегрального исчисления» т. 1, 1962 г.
3. «Геометрия уравнений», журнал “Квант” (выпуск №10, 1988 г.)
4. «Огибающая», журнал “Квант” (выпуск №3, 1987 г.)
5. «Физика – 11 класс»; глава 8, п. 60; Изд. Просвещение; 2008 г.