Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение
«Гимназия № 53»

Свойства инверсии

Выполнила Салитова Ангелина,
ученица 10 класса
МБОУ «Гимназия №53»
Научный руководитель
кандидат физ.-мат. наук
Монахова Оксана Александровна
доцент ПГУ

Пенза, 2024

Оглавление

Введение

В школьном курсе геометрии рассматриваются движения и гомотетия. Эти преобразования плоскости относятся к классу линейных. Однако иногда бывает полезно рассмотреть и нелинейные преобразования. В этом случае прямая может перейти в какую-либо кривую. Инверсия – это отображение плоскости на себя, которое может переводить окружности в прямые. Благодаря этому, инверсия помогает решать некоторые технические задачи.

Со времён изобретения Джеймсом Уаттом паровой машины стояла задача построения шарнирного механизма, переводящего движение одного шарнира по окружности в движение другого шарнира по прямой, т.е. спрямляющего механизма, или прямила. Долгое время учёные и инженеры не могли решить эту задачу, строили приближённые прямила, где ведомый шарнир ходил не строго по прямой, но рядом, не очень далеко удаляясь от неё. А окончательно решить задачу создания прямила помогла красивая математика, а именно инверсия. Прямило Липкина-Посселье, изобретенное в 1864 г., переводит движение по дуге окружности в точное прямолинейное движение. Этот механизм реализует инверсию относительно окружности с центром в закреплённом шарнире и радиусом, зависящим от длины звеньев механизма. [5].

В научной литературе рассматриваются обобщения инверсии, в частности в статье [3] рассматривается инверсия относительно эллиптического цикла.

В прошлом году я занималась изучением различных способов измерения расстояния между точками на плоскости, а также изучением различных кривых (окружности, эллипса, гиперболы и параболы) в новой геометрии. Меня заинтересовал вопрос: можно ли инверсию применить относительно окружности в геометрии, где расстояние определяется иначе, чем в евклидовой геометрии, каковы будут свойства этой инверсии?

Основной ***целью*** представленной работы было знакомство с инверсией, с ее свойствами в евклидовой геометрии и в геометрии, где расстояние между точками измеряется по катетам прямоугольного треугольника.

В работе поставлены и решены следующие задачи.

1. Знакомство с понятием инверсии относительно окружности.
2. Изучение свойств инверсии относительно окружности.
3. Знакомство с задачами, которые помогает решить инверсия относительно окружности.
4. Определение инверсии относительно квадрата.
5. Нахождение образа прямой при инверсии относительно квадрата.
6. Нахождение образа квадрата при инверсии относительно квадрата.

Таким образом, в представленной работе рассматривается еще одно обобщение инверсии, что подтверждает ***актуальность*** исследования.

Новизна исследования состоит в следующем

1) получены координаты образа точки при инверсии относительно квадрата;
2) получено уравнение образа горизонтальной прямой при инверсии относительно квадрата;
3) показано, что образом квадрата, стороны которого параллельны сторонам квадрата инверсии является квадрат.

Практическое значение работы состоит в нахождении преобразования, которое движение точки по прямой преобразует в движение по замкнутой кривой, названной в работе «лепестком». Такое преобразование возможно будет интересно с технической точки зрения, что характеризует ***метапредметность*** исследования.

Основные понятия

1. Понятие инверсии.

Пусть ω – окружность с центром O и радиусом R на некоторой плоскости, A_1 – произвольная точка этой же плоскости, отличная от центра O.

Определение.[1] Точка A_2 называется *симметричной* точке A_1 относительно окружности ω с центром O и радиусом R, если точка A_2 лежит на луче OA_1 (рис. 1), и выполняется равенство

$$OA_1 \cdot OA_2 = R^2. \tag{1}$$

Из определения следуют следующие утверждения.[3]

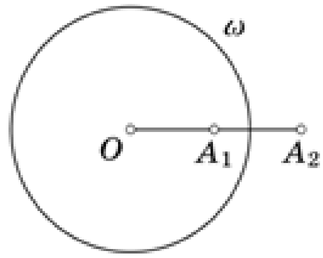


Рис. 1

1. Для каждой точки плоскости, кроме центра O, существует единственная точка, симметричная ей относительно окружности ω.
2. Для центра O симметричной точки не существует.
3. Если точка A_2 симметрична точке A_1 относительно окружности ω, то и точка A_1 симметрична точке A_2 относительно окружности ω.
4. Каждая точка, лежащая на окружности ω, симметрична сама себе.
5. Если A_1 и A_2 – различные симметричные точки, то одна из них лежит внутри окружности ω, а другая – снаружи.
6. Точки симметричные точкам прямой, проходящей через центр O, лежат на этой прямой.

Определение. *Инверсией* плоскости относительно окружности ω с центром в точке O, радиусом R называется преобразование плоскости, которое переводит любую точку, кроме O, в точку, симметричную ей относительно окружности ω. Центр окружности O называется центром инверсии, число R^2 – степенью инверсии.

***Задача* 1.** Рассмотрим на координатной плоскости точку $A_1(x_1, y_1)$ и окружность ω: $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$. Найдите координаты точки A_2, симметричной точке A_1 относительно окружности ω, центр окружности обозначим $O(a, b)$.

Решение. Обозначим координаты точки A_2 (x_2, y_2). Найдем длины отрезков: $OA_1=\sqrt{(x_1-a)^2+(y_1-b)^2}$, $OA_2=\sqrt{(x_2-a)^2+(y_2-b)^2}$, подставим эти выражения в равенство (1). Получим уравнение $((x_1-a)^2+(y_1-b)^2)((x_2-a)^2+(y_2-b)^2)=R^4$. (2)

Точки A_1 и A_2 лежат на одном луче OA_1, следовательно, координаты векторов $\overrightarrow{OA_1}$ и $\overrightarrow{OA_2}$ пропорциональны. Так как точки A_1 и A_2, отличны от центра окружности O, то хотя бы одно из выражений $(x_2 - a)$ или $(y_2 - b)$ отлично от 0.

Пусть $x_2 \neq a, y \neq b$. Тогда составим систему уравнений:

$$\begin{cases} ((x_1-a)^2+(y_1-b)^2)((x_2-a)^2+(y_2-b)^2)=R^4, \\ \dfrac{x_1-a}{x_2-a}=\dfrac{y_1-b}{y_2-b}. \end{cases}$$

Решив систему, получим следующие координаты точки A_2: $x_2=\frac{(x_1-a)R^2}{(x_1-a)^2+(y_1-b)^2}+a$, $y_2=\frac{(y_1-b)R^2}{(x_1-a)^2+(y_1-b)^2}+b$. Пусть $x_2 = a$ и $y_2 \neq b$, тогда $x_1 = a$ и $y_1 \neq b$, из уравнения (2) следует, $y_2=\frac{R^2}{y_{1-b}}+b$, это частный случай ранее полученных формул, аналогичный результат получаем в последнем случае $x_2 \neq a$ и $y_2 = b$. Следовательно, в общем виде координаты точки A_2, выражаются формулами:

$$x_2=\frac{(x_1-a)R^2}{(x_1-a)^2+(y_1-b)^2}+a,\ y_2=\frac{(y_1-b)R^2}{(x_1-a)^2+(y_1-b)^2}+b.$$

2. Построение симметричных точек.

Построение симметричных точек получается из следующего утверждения.

Утверждение. Пусть K, M, N – произвольные точки на окружности, p – серединный перпендикуляр к отрезку MN. Тогда прямые KM и KN пересекают прямую p в точках A и B, симметричных относительно окружности ω.

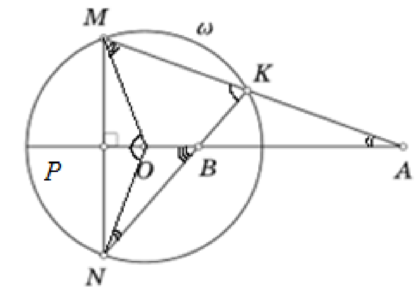


Рис. 2

Доказательство. Пусть P – точка пересечения прямой p с окружностью, которая лежит вне отрезка AB. (Рис. 2) $\angle MKN$ – вписанный, $\angle MKN = \frac{1}{2}\angle MON$, а $\angle PON = \frac{1}{2}\angle MON$, значит, $\angle MKN = \angle PON$ и $\angle BKA = \angle BON$ (как смежные с равными углами $\angle MKN$ и $\angle PON$). Поэтому в треугольниках ONB и KAB все углы соответственно равны. Следовательно, равны и соответственные углы треугольников BON и MOA. Из подобия треугольников BON и MOA получаем: $\frac{OA}{ON}=\frac{OM}{OB}$, $OA{\cdot}OB = OM{\cdot}ON = R^2$.

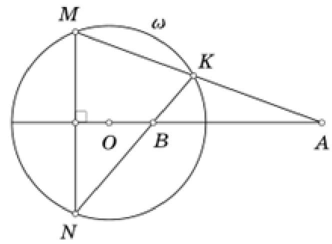


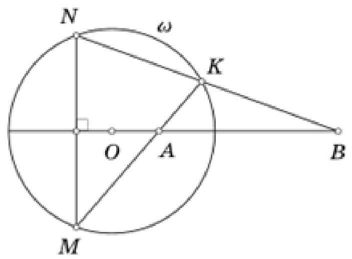
Рис. 3

Используя полученный результат, строим точку, симметричную данной точке A, следующим образом (рис. 3):

1) проведём прямую OA и произвольную секущую, проходящую через точку A и пересекающую окружность ω в точках M и K;

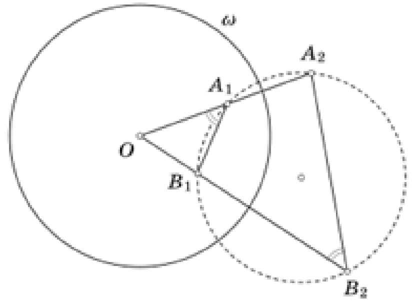
2) опустим из точки M перпендикуляр на прямую OA, и продолжим его до пересечения с окружностью в точке N.

Прямая KN пересекает OA в искомой точке B.



Если на чертеже поменять местами буквы A и B, а также M и N, то описание построения не изменится (рис 4). Последовательность действий останется той же самой, поскольку произвольную секущую KM можно провести как из внутренней точки окружности, так и из внешней, а для построения безразлично – лежит исходная точка A на отрезке KM или на его продолжении.

Рис. 4



Приведенный способ построения – это лишь один из возможных способов построения точек, симметричных относительно окружности.

3. Свойства инверсии.

Свойство 1. Пусть A_1, A_2 и B_1, B_2 – пары различных

Рис. 5

точек, симметричных относительно окружности ω с центром O. Тогда $\angle OA_1B_1=\angle OB_2A_2$. (Рис. 5).

Доказательство. По определению симметричных точек $OA_1{\cdot}OA_2 = R^2 = OB_1{\cdot}OB_2$, следовательно, $\frac{OA_1}{OB_1} = \frac{OB_2}{OA_2}$. Из пропорциональности сторон следует подобие треугольников OA_1B_1 и OA_2B_2 по двум сторонам и углу между ними. Из подобия треугольников следует равенство углов: $\angle OA_1B_1 = \angle OB_2A_2$.

***Задача* 2.** Вычислите длину отрезка A_2B_2, если известны стороны треугольника OA_1B_1 и радиус окружности инверсии.

Решение. Из подобия треугольников OA_1B_1 и OB_2A_2 следует пропорциональность сторон $\frac{OB_2}{OA_1} = \frac{A_2B_2}{A_1B_1}$. B_1 симметрична B_2 относительно окружности ω, следовательно,

$OB_1 \cdot OB_2 = R^2 \Rightarrow OB_2 = \frac{R^2}{OB_1}$, подставим в предыдущее равенство, получим $\frac{R^2}{OA_1 \cdot OB_1} = \frac{A_2B_2}{A_1B_1}$, тогда выразим $A_2B_2 = \frac{A_1B_1 \cdot R^2}{OA_1 \cdot OB_1}$.

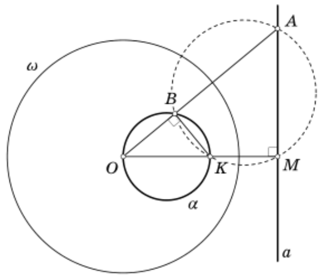


Рис. 6

Свойство 2. Прямая, не проходящая через центр инверсии, переходит в окружность, проходящую через центр инверсии.

Доказательство. Рассмотрим различные случаи.

А) Прямая не является касательной. (Рис.6).

Опустим из O перпендикуляр OM на прямую a и рассмотрим точку K, симметричную точке M относительно окружности инверсии. Построим окружность α с диаметром OK. Рассмотрим произвольную прямую, не совпадающую с OK, проходящую через центр O и непараллельную прямой a. Пусть она пересекает окружность α в точке B, а прямую a – в точке A.

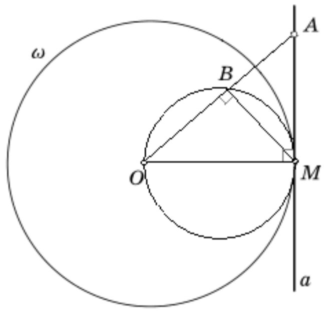


Рис. 7

Угол OBK прямой, поскольку он опирается на диаметр. Из подобия прямоугольных треугольников OBK и OMA получаем $OA \cdot OB = OM \cdot OK$. Точки M и K по построению симметричны, $R^2 = OM \cdot OK = OA \cdot OB$. Значит, точки A и B также симметричны относительно окружности инверсии. Следовательно, прямая a переходит в окружность α при инверсии.

Б) Образ касательной в точке M – окружность, касающаяся ω в точке M и диаметром равным OM. (Рис. 7).

Из подобия треугольников OBM и OMA следует пропорциональность сторон $\frac{OB}{OM} = \frac{OM}{OA}$, $OB \cdot OA = OM^2 \Rightarrow OB \cdot OA = R^2$, следовательно, точка A симметрична точке B относительно окружности ω. В этом случае свойство также выполняется.

Свойство 3. Окружность α, проходящая через центр инверсии, переходит в прямую, не проходящую через центр инверсии.

Доказательство. Пусть окружность инверсии имеет центр O и радиус R, окружность α имеет центр O'. $OO_1 \cap \alpha = K$. Построим точку симметричную точке K относительно окружности ω, получим точку M, $M \in OK$ (по определению инверсии $OK \cdot OM = R^2$). Проведем прямую a через точку M перпендикулярно OO'. Прямая a не проходит через центр инверсии. (Рис. 8).

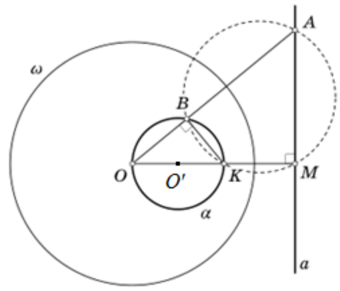


Рис. 8

Выберем на окружности α точку B $(B \neq K, O)$. Прямая OB пересекает прямую a в точке A. Докажем, что A и B симметричны относительно окружности инверсии.

Треугольники OBK и OMA подобны как прямоугольные с общим углом при вершине O. Из их подобия следует пропорциональность соответственных сторон $\frac{OA}{OK} = \frac{OM}{OB}$, следовательно, $OA \cdot OB = OM \cdot OK = R^2$. Значит, A и B симметричны относительно окружности инверсии.

Свойство 4. Окружность, не проходящая через центр инверсии, переходит в окружность, не проходящую через центр инверсии.

Доказательство. Рассмотрим инверсию относительно окружности ω и окружность α_1 , не проходящую через центр инверсии O.

Проведём прямую через центры окружностей α_1 и ω. Эта прямая пересекает окружность α_1 в точках B_1 и C_1, (B_1C_1 – диаметр) Построим точки B_2 и C_2, симметричные точкам B_1 и C_1 относительно окружности ω. На диаметре B_2C_2 построим окружность α_2. (Рис. 9). Докажем, что точки, симметричные точкам окружности α_1, расположены на окружности α_2.

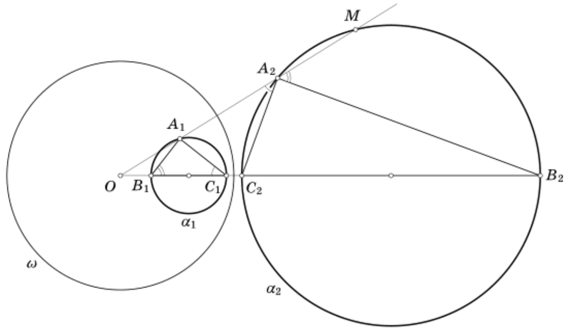


Рис. 9

Возьмём на окружности α_1 произвольную точку A_1 и построим точку A_2, симметричную точке A_1 относительно окружности ω.

Применим свойство 1 к двум четвёркам точек: к A_1, A_2; B_1, B_2 и к A_1, A_2; C_1, C_2. Получим равенства углов $\angle A_1B_1C_1 = \angle B_2A_2M$, $\angle A_1B_1C_1 = \angle C_2A_2O$. Треугольник $A_1B_1C_1$ – прямоугольный, так как B_1C_1 – диаметр окружности, значит, $\angle A_1B_1C_1 + \angle A_1C_1B_1 = 90$, следовательно, $\angle B_2A_2M + \angle C_2A_2O = 90$, значит, $\angle B_2A_2C_2$ – прямой и, следует, что точка A_2 расположена на окружности α_2 с диаметром B_2C_2, что и требовалось доказать.

Свойство 5. Касающиеся окружности (окружность и прямая) переходят при инверсии в касающиеся окружности или в окружность и прямую, или в пару параллельных прямых.

Доказательство. Если точка касания не совпадает с центром инверсии, то после инверсии касающиеся окружности (или касающиеся окружность и прямая) будут по-прежнему иметь одну общую точку, т. Е. касание сохранится.

Если окружности с центрами A и B касаются в точке O, то при инверсии с центром O они перейдут в пару прямых, перпендикулярных AB. (Рис.10).

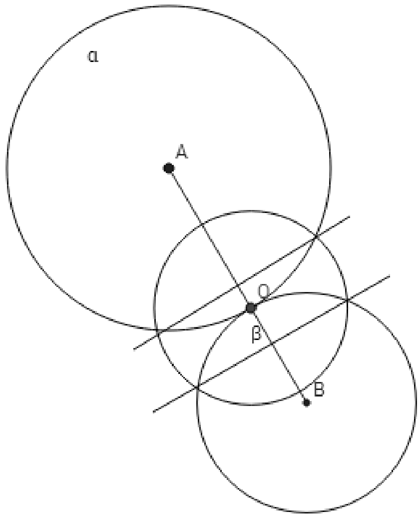


Рис. 10

Если прямая l касается в точке O окружности с центром A, то при инверсии с центром O прямая l переходит в себя, а окружность – в прямую, перпендикулярную OA. Получаем пару параллельных прямых.

Свойство 6. Инверсия сохраняет угол между пересекающимися прямыми, между двумя окружностями.

Доказательство.

Рассмотрим сначала две пересекающиеся прямые a и b, которые при инверсии переходят в пересекающиеся окружности α и β. Из доказательства свойства 3 следует, что каждая из этих прямых перпендикулярна прямой, проходящей через центр инверсии и центр окружности, симметричной этой прямой относительно окружности инверсии. Таким образом, эти прямые перпендикулярны радиусам соответственных окружностей, проведенным в точку O. Следовательно, они параллельны соответствующим касательным к окружностям, проведенным в точке O. Точка пересечения прямых P

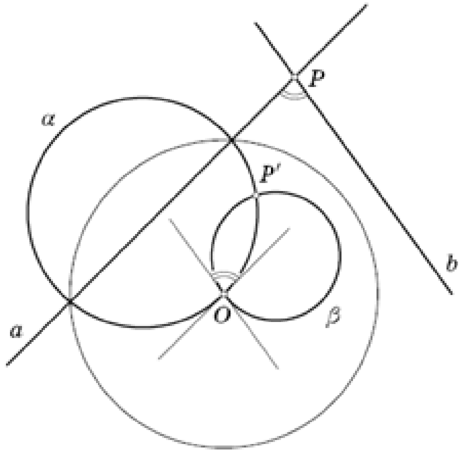


Рис. 11

переходит в точку пересечения окружностей P', а второй раз окружности α и β пересекаются в центре инверсии O. (Рис. 11). Угол между прямыми a и b равен углу между касательными в точке O и равен углу между их образами α и β, так как угол между этими окружностями в точке O равен углу в точке P'.

Если рассмотреть теперь две окружности, пересекающиеся в точке P и касающиеся прямых a и b, то образы этих окружностей пересекаются в точке P' и касаются в ней окружностей α и β соответственно. Значит, угол между образами этих окружностей равен углу между α и β, который, в свою очередь, равен углу между касательными a и b, то есть углу между исходными окружностями.

Инверсия помогает решить задачу

Задача, [2]

Постройте окружность, проходящую через две данные точки и касающуюся данной окружности.

Решение

Если обе данные точки A и B лежат на данной окружности S, то задача решений не имеет.

Пусть теперь точка A не лежит на S. При инверсии с центром A искомая окружность перейдет в прямую, проходящую через точку симметричную B и касающуюся окружности симметричной окружности S. Из этого вытекает следующее построение.

1. Сделаем инверсию окружности S и точки B относительно произвольной окружности с центром A. Точка B перейдет в точку T. Окружность S в окружность S^*. (Рис.12)

2. Проведем через T касательную l к S^*. (Рис.13)

3. Сделаем инверсию касательной l. (Рис.14)

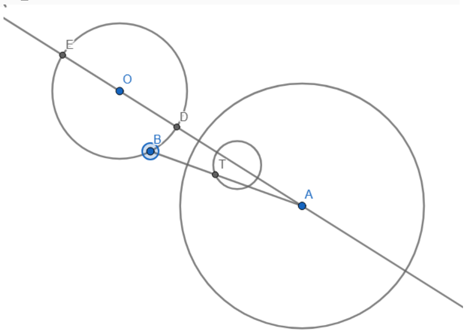


Рис. 12

4. По свойству инверсии прямая l перейдет в искомую окружность, проходящую через точки A и B, касающуюся окружности S.

Если точка T лежит на S^*, то задача имеет единственное решение.

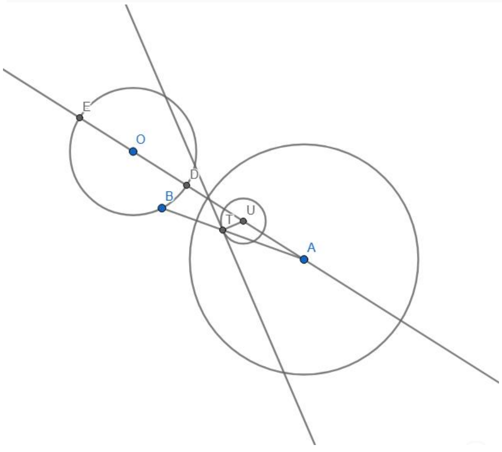


Рис. 14

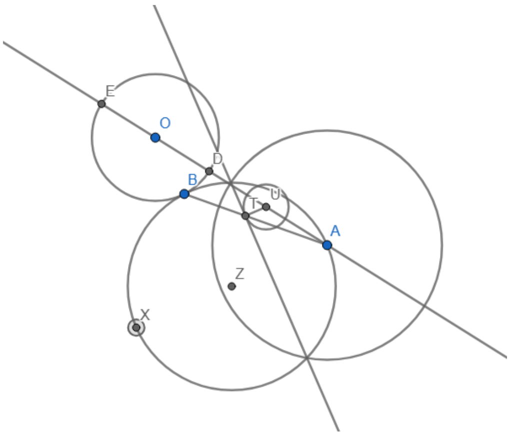


Рис. 13

Если T лежит вне S^*, то решений два.

1. Первым шагом строим окружность S^* симметричную S и точку T симметричную B. Точка T не лежит на окружности S^*. (Рис.15)
2. Проводим касательные из T к окружности S^*. Их будет две. (Рис.16)
3. Строим окружности симметричные этим касательным, они проходят через точки A и B и касаются окружности S. (Рис.17)

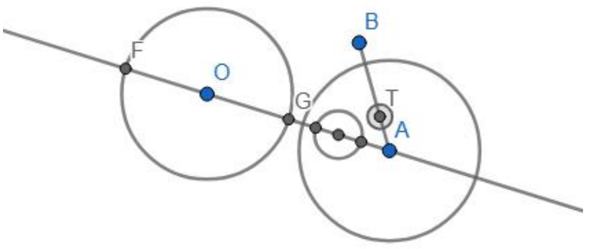


Рис. 15

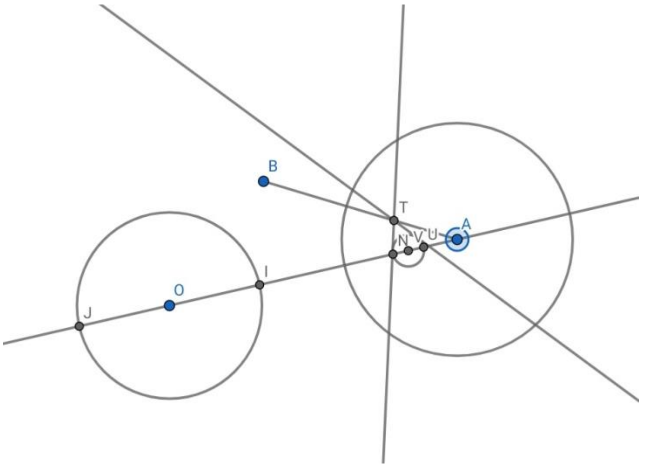


Рис. 15

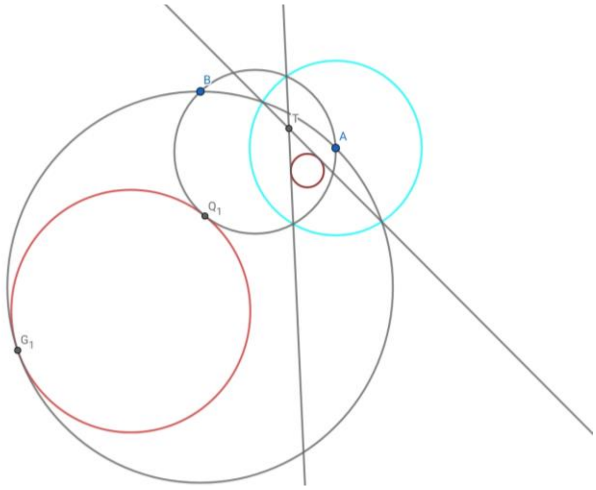


Рис. 16

Если T лежит, внутри S^*, то задача не имеет ни одного решения.

Различные способы измерения расстояния между точками

Евклидово расстояние между точками $A(x_1\ y_1)$ и $B(x_{2,}\ y_2)$ определяется как длина отрезка, соединяющего эти точки, и вычисляется по формуле $\rho(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. Но такой способ измерения расстояния не всегда удобен.

Допустим, мы находимся в городе с очень правильной планировкой (например, в г. Сочи), [4]. В таком городе нет смысла пользоваться евклидовым расстоянием, если нас интересует расстояние от одного перекрестка A до другого B, разумно взять за расстояние между ними длину кратчайшего пути по улицам города от пункта A до пункта B, такое расстояние будет естественным с точки зрения водителя, который не может проезжать по прямой. (Рис.18)

Запишем это расстояние в координатах: если точка A имеет координаты $(x_1\ y_1)$, а т.B координаты $(x_{2,}\ y_2)$, то расстояние ρ между этими точками определяется формулой:

$$\rho\,(A,B) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|. \qquad (3)$$

Если на множестве определено расстояние, то с его помощью можно описать геометрические объекты пространства.

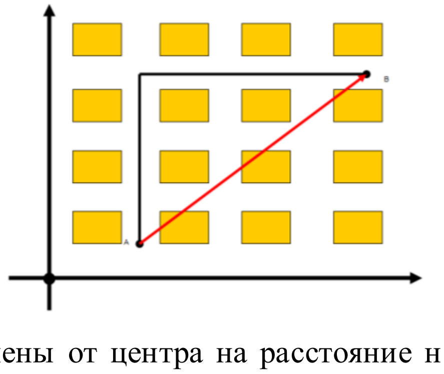


Рис. 17

Единичный шар – это множество точек, которые удалены от центра на расстояние не большее, чем 1. Формальная запись такого множества: $\{M|$

$\rho(M, O) \le 1\}$.

Для евклидова расстояния ρ единичный шар на плоскости будет обычным кругом.

Единичный шар с центром в нуле с точки зрения расстояния ρ, определённого формулой (3), будет выглядеть иначе. Точка M тогда и только тогда принадлежит единичному шару с центром в нуле для этого расстояния, когда выполнено неравенство $|x|+|y| \le 1$. Все такие точки M принадлежат квадрату. (Рис. 19).

Для **построения** раскроем модули:

I. Если, $x \ge 0$, $y \ge 0$, то $y \le 1 - x$.

II. Если, $x \le 0$, $y > 0$, то $y \le 1 + x$.

III. Если, $x < 0$, $y < 0$, то $y \le - x - 1$.

IV. Если, $x > 0$, $y < 0$, то $y \le x - 1$.

Таким образом, окружность в геометрии, где расстояние между точками измеряется по формуле (3) выглядит как квадрат.

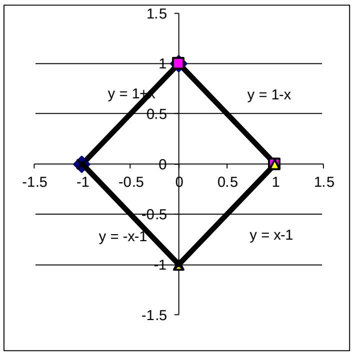


Рис. 19

Исследовательская задача

Нас заинтересовал вопрос, какими свойствами обладает инверсия в пространстве, где расстояние определяется по формуле (3)? Будем называть ее инверсией относительно квадрата.

1. Координаты симметричной точки

Рассмотрим на координатной плоскости точку $A_1(x_1, y_1)$ и «окружность», определяемую формулой ω: $|x|+|y| = R$. Найдем координаты точки A_2, симметричной точке A_1 относительно «окружности» ω, то есть, относительно квадрата. Центр «окружности» обозначим $O(0, 0)$.

Решение. Обозначим координаты точки A_2 (x_2, y_2). Найдем длины отрезков: $OA_1 = |x_1|+|y_1|$, $OA_2 = |x_2|+|y_2|$, подставим эти выражения в равенство (1).

$$OA_1 \cdot OA_2 = R^2.$$

Получим уравнение $(|x_1|+|y_1|)(|x_1|+|y_1|) = R^2$. Точки A_1 и A_2 лежат на одном луче OA_1, следовательно, координаты векторов $\overrightarrow{OA_1}$ и $\overrightarrow{OA_2}$ пропорциональны. Так как точки A_1 и A_2, отличны от центра окружности O, то хотя бы одно из выражений $|x_2|$ или $|y_2|$ отлично от 0.

Тогда получим систему уравнений: $\begin{cases} (|x_1| + |y_1|)(|x_2| + |y_2|) = R^2, \\ \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}. \end{cases}$

Решив систему, получим $|x_2| = \frac{|x_1|R^2}{(|x_1|+|y_1|)^2}$, $|y_2| = \frac{|y_1|R^2}{(|x_1|+|y_1|)^2}$. Пусть $x_1 > 0$, тогда $x_2 > 0$, если $x_1 < 0$, то $x_2 < 0$ и $x_1 = 0$, то $x_2 = 0$, значит, $x_2 = \frac{x_1R^2}{(|x_1|+|y_1|)^2}$, аналогично, $y_2 = \frac{y_1R^2}{(|x_1|+|y_1|)^2}$

Следовательно, координаты точки A_2, выражаются формулами:

$$x_2 = \frac{x_1R^2}{(|x_1|+|y_1|)^2},\ y_2 = \frac{y_1R^2}{(|x_1|+|y_1|)^2}.$$

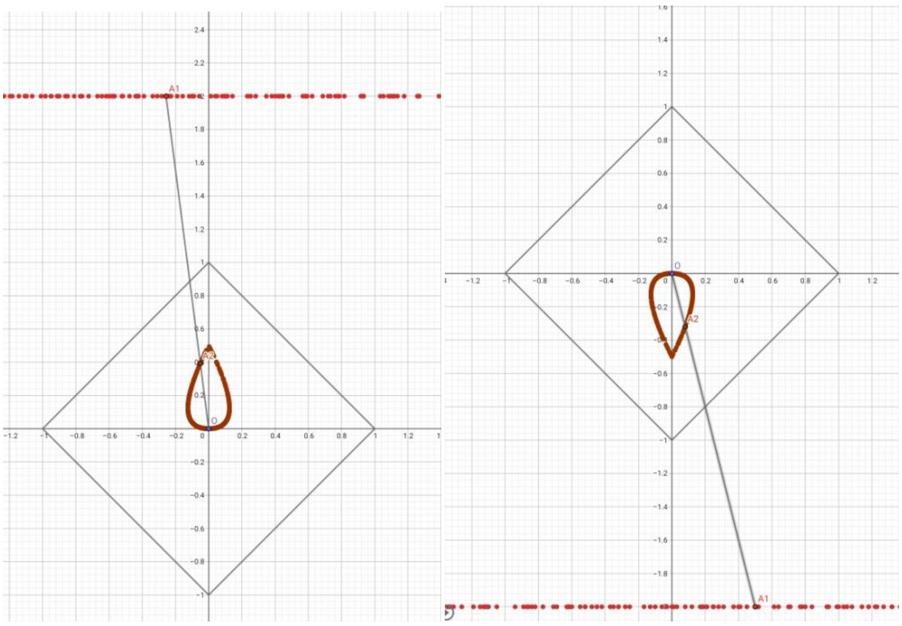
При инверсии относительно квадрата точка, являющаяся его центром $O(0,0)$ не имеет образа, можно считать её образом бесконечно удаленную точку, также как и в евклидовой геометрии.

2. Что является образом прямой?

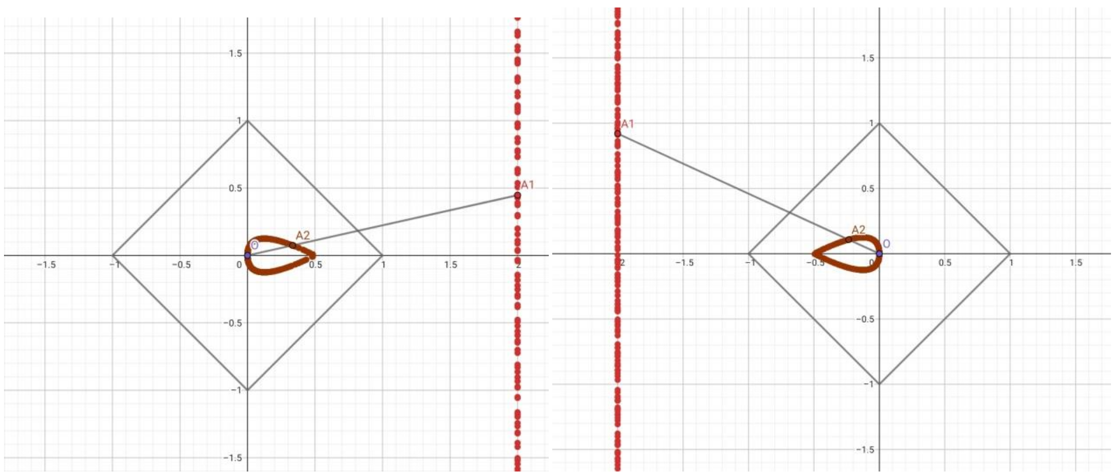
Если прямая проходит через центр квадрата, точку с координатами (0,0) то их образы будут лежать на этой же прямой, что следует из определения инверсии. Как выглядит образ прямой не проходящей через центр квадрата?

Для ответа на этот вопрос, мы воспользовались динамическими возможностями программы Geogebra.

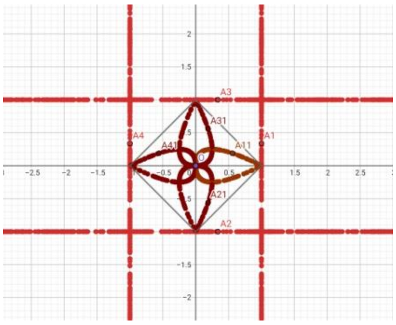
1. Пусть точка A_1 движется по горизонтальной прямой $y = b$, $b > 0$, тогда симметричная ей точка A_2 движется по «лепестку», направленному острием вверх. При $b < 0$ острие лепестка направлено вниз.



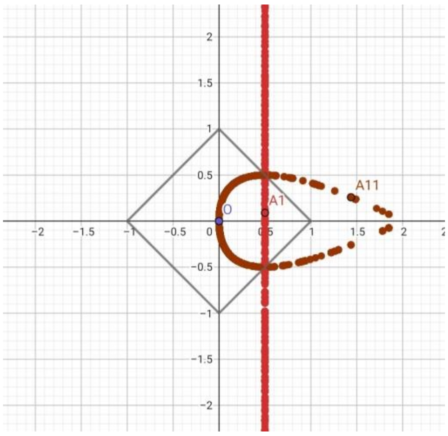
2. Пусть точка A_1 движется по вертикальной прямой $x = b$, $b > 0$, тогда симметричная ей точка A_2 тоже движется по «лепестку», направленному острием вправо. При $b < 0$ острие лепестка направлено влево.



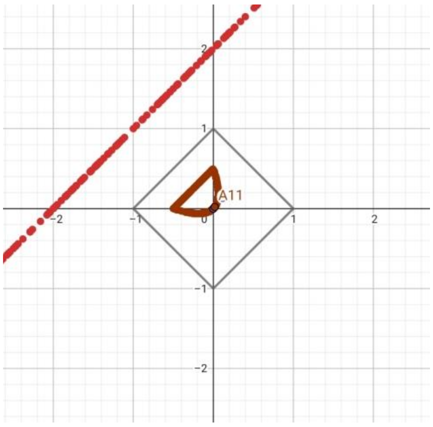
3. Если одна из координат точки A_1 совпадает с радиусом окружности, то острие «лепестка» совпадает с вершиной квадрата – «окружности» инверсии.

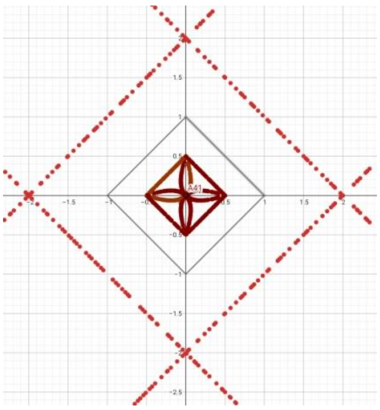


4. Если одна из координат точки A_1 меньше радиуса окружности, то «лепесток» выходит за контур «окружности» инверсии.

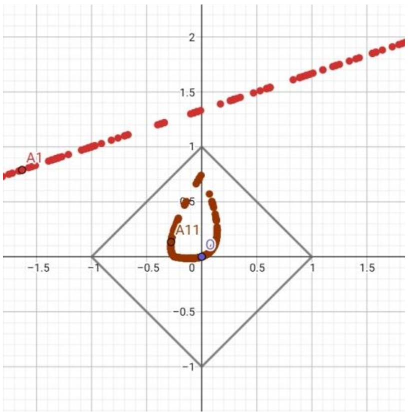


5. При движении точки A_1 по наклонной прямой $y = x + b$, параллельной стороне квадрата, симметричная ей точка A_2 движется по кривой, представленной на рисунке. Она представляет собой комбинированную линию – кусочек похожий на отрезок прямой, параллельной стороне квадрата, и часть дуги.

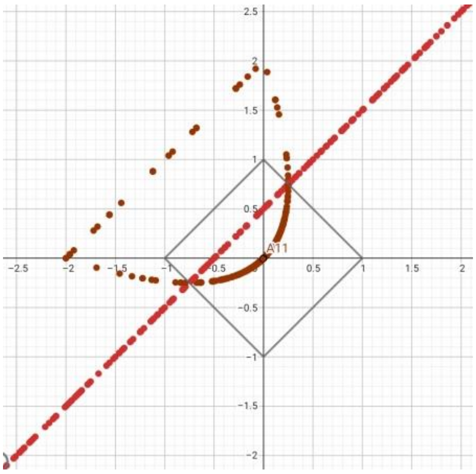
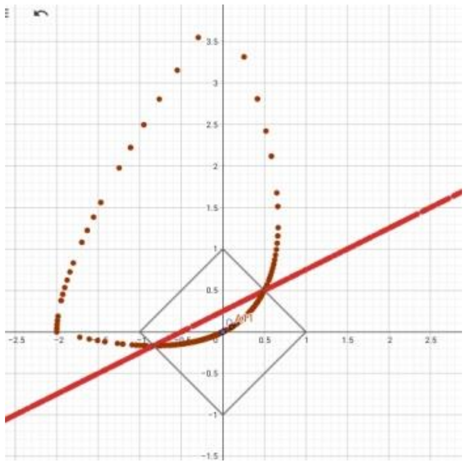




6. Если прямая $y = kx + b$, не параллельна стороне квадрата, то ее образ представлен на следующем рисунке.



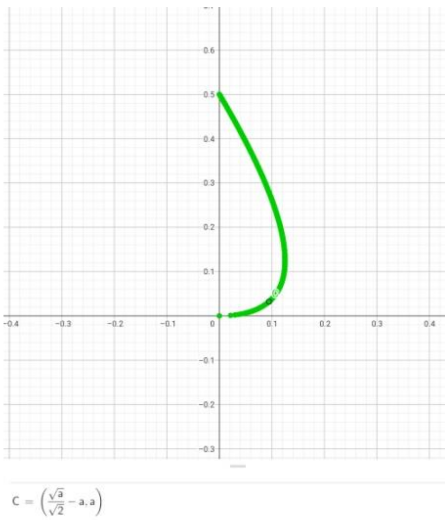
7. Если часть прямой находится внутри квадрата, образ выходит за пределы «круга» инверсии.

Рассмотрим аналитическое представление образов при инверсии относительно квадрата.

Точка A_1 движется по горизонтальной прямой $y = b$. Рассмотрим случай $b > 0$. Пусть $x_1 > 0$. Тогда координаты точки A_2, которая является образом A_1 при инверсии относительно квадрата будут иметь вид $x_2 = \frac{x_1 R^2}{(x_1+b)^2}$, $y_2 = \frac{bR^2}{(x_1+b)^2}$. Выразим x_1 через y_2: $x_1 = \sqrt{\frac{bR^2}{y_2}} - b$, подставим полученное выражение в выражение для x_2. Получим $x_2 = \frac{R\sqrt{y_2}}{\sqrt{b}} - y_2$. Из условия следует, что x_2 должно быть положительным. Следовательно, $0 < y_2 < \frac{R^2}{b}$.

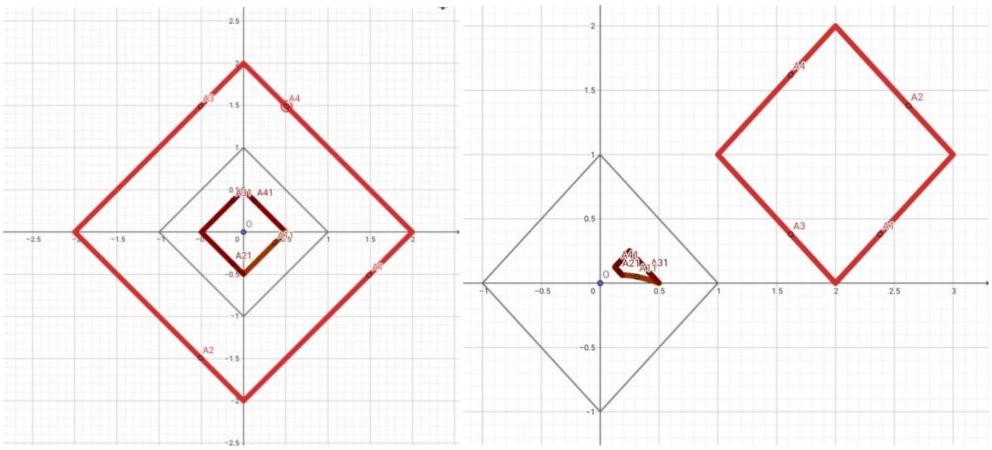
Значит, движение точки A_2 происходит по траектории, описываемой уравнением $x = \frac{R\sqrt{y}}{\sqrt{b}} - y$, при условии $y \in \left(0, \frac{R^2}{b}\right)$. Эта линия представляет собой правую часть лепестка. Мы можем проверить этот факт, построив в Geogebra эту линию.



3. В какую линию преобразуется «окружность»?

Из предыдущих результатов можно заметить, что если точка A_1 движется по отрезку параллельному квадрату, то образ движется тоже по линии похожей на отрезок прямой.

В случае если траектория A_1 параллельна сторонам квадрата получаются следующие картинки.



Точка A_1, движется по наклонной прямой $y = x + b$, $b > 0$ параллельной стороне квадрата. Пусть $y_1 = x_1 + b$, тогда $x_2 = \frac{x_1 R^2}{(|x_1|+|x_1+b|)^2}$, $y_2 = \frac{(x_1+b)R^2}{(|x_1|+|x_1+b|)^2}$.

Рассмотрим участок кривой, на котором $-b < x_1 < 0$, тогда после раскрытия модулей получим $x_2 = \frac{x_1 R^2}{b^2}$, $y_2 = \frac{(x_1+b)R^2}{b^2} = \frac{x_1 R^2}{b^2} + \frac{R^2}{b} = x_2 + \frac{R^2}{b}$. Следовательно, точка A_2 движется по траектории $y = x + \frac{R^2}{b}$ при условии $x \in \left(-\frac{R^2}{b}, 0\right)$, эти условия определяют отрезок прямой параллельной стороне квадрата инверсии и является стороной квадрата образа.

Значит, образом тех «окружностей» - квадратов, стороны которых параллельны сторонам квадрата инверсии, а их центры совпадают, является «окружность»-квадрат со сторонами параллельными сторонам квадрата, относительно которого выполняется инверсия, а центр совпадает с центром квадрата инверсии.

Таким образом, можно сделать вывод: свойства инверсии в геометрии, где расстояние определяется по формуле (3), и окружность изображается квадратом, в целом не совпадают со свойствами инверсии относительно окружности в евклидовой геометрии, но в некоторых частных случаях есть совпадение, специально расположенные «окружности»-квадраты, стороны которых параллельны сторонам «окружности» инверсии, преобразуются в «окружности»-квадраты.

Заключение

Инверсия – это преобразование плоскости, обладающее удивительными свойствами, необычными для школьной геометрии. Знакомство с ней расширило мои представления о геометрических преобразованиях, показало глубину геометрии за пределами школьного учебника. При решении задач на построение я освоила работу в программе Geogebra.

В ходе выполнения работы были решены все поставленные задачи.

Список использованной литературы

1. Жижилин И.Д. Инверсия. – М.: Изд-во МЦНМО, 2009. – 72 с.
2. Прасолов В.В. Задачи по планиметрии. – М.:МЦМНО, 2001.
3. Ромакина Л. Н. Инверсия относительно эллиптического цикла гиперболической плоскости положительной кривизны, Тр. Ин-та матем., 2019, том 27, номер 1, 60– 78.
4. Скворцов В. А. Примеры метрических пространств / В. А. Скворцов. – М.: МЦНМО, 2002.
5. http://www.etudes.ru/ru/etudes/inversor/.

Рецензия

на учебно-исследовательскую работу

ученицы 10 класса МБОУ «Гимназия №53» г. Пензы

Салитовой Ангелины Артемовны «Свойства инверсии»

Инверсия относительно окружности – это отображение плоскости на себя, которое может переводить окружности в прямые и является примером нелинейного преобразования. Благодаря своим свойствам инверсия помогает решать некоторые геометрические и технические задачи. Рассматриваются также различные обобщения этого понятия, в частности инверсия относительно конических сечений.

Основной целью представленной работы было знакомство с инверсией, с ее свойствами в евклидовой геометрии и в геометрии, где расстояние между точками измеряется по катетам прямоугольного треугольника.

Новизна исследования состоит в том, что получены координаты образа точки при инверсии относительно квадрата, получено уравнение образа горизонтальной прямой при инверсии относительно квадрата, показано, что образом квадрата, стороны которого параллельны сторонам квадрата инверсии является квадрат.

Практическое значение работы состоит в нахождении преобразования, которое движение точки по прямой преобразует в движение по замкнутой кривой, названной в работе «лепестком». Такое преобразование возможно будет интересно с технической точки зрения, если удастся реализовать его с помощью механизма.

В работе использованы алгебраические методы, методы аналитической геометрии. Считаю, что работа может быть представлена для участия в научно-практической конференции.

Научный руководитель

кандидат физ.-мат. наук

доцент кафедры «Математическое образование» ПГУ Монахова О.А.