Федеральное агентство по образованию РФ
Муниципальное бюджетное образовательное учреждение
лицей современных технологий управления №2

Применение основ дифференциального исчисления в экономической теории

Выполнил:
Ученик 11 «В» класса
Федоров Г. Д.
Научный руководитель:
Преподаватели математики
МБОУ ЛСТУ №2
Гейдарова Е. Р.
Гейдарова Л. Р.

Пенза 2023.

Оглавление

Введение.

Актуальность данной работы заключается в том, что помимо необходимости умения моделировать несложные экономические прогнозы хотя бы на небольшой период времени, необходимо учитывать множество не заложенных изначально факторов, которые могут возникнуть в ходе того или иного экономического процесса. Достаточно часто встречающееся во многих моделях понятия дифференциалов и производных предполагает, что незначительное изменение некоторых параметров на начальном этапе могут сильно воздействовать на весь процесс в дальнейшем. Поскольку на практике это достаточно часто происходит – необходимо понимание того, насколько подобные изменения (стремящиеся в пределе к нулю) влияют на основную модель.

Цель данной работы – развитие практических навыков учащихся в области математических методов экономической теории.

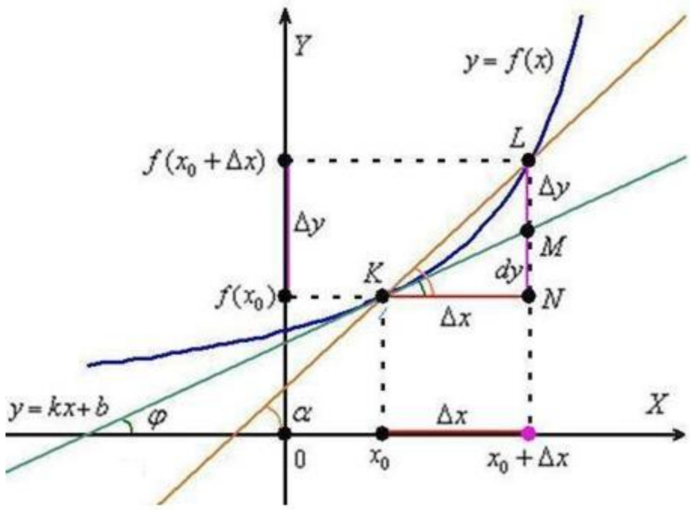
Задача данной работы - познакомить учащихся среднего и старшего звена, уже владеющих основами математики и экономической теории, с вопросами применения основных математических понятий анализа в некоторых разделах экономики, в частности, в предельном анализе, теории эластичности и вычислении критических значений экономических величин.

Методологическая основа работы – анализ научной литературы и практический метод.

1. Что такое производная и дифференциал.

Производная – одно из фундаментальных понятий математики. Само понятие «производная в экономике» тесно связано с производственными задачами, предельным анализом и эластичностью функций.

Рассмотрим функцию $y = f(x)$ (синий график), которая определена и непрерывна на некотором интервале, **произвольную** точку x_0, принадлежащую данному интервалу, и соответствующее значение $f(x_0)$:



Зададим аргументу функции приращение Δx (красный отрезок) в точке x_0. При этом $x_0 + \Delta x$ – вполне определённая точка нашего интервала и в этой точке существует своё значение функции $f(x_0 + \Delta x)$.

Приращение аргумента Δx повлекло за собой приращение функции: $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ (малиновый отрезок).

<u>**Определение**</u>: производной функции в точке x_0 называется предел отношения приращения функции Δy к вызвавшему его приращению аргумента Δx в этой точке при $\Delta x \to 0$. Это можно записать следующим образом:

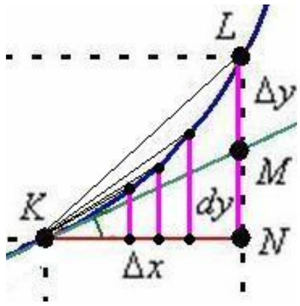
$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (2)$$

Если данный предел *конечен*, то функция $y = f(x)$ является дифференцируемой в точке x_0. Здесь важно помнить, что приращение аргумента стремится к нулю, но нуля не достигает, иными словами, величина Δx бесконечно мала, но не равна нулю.

При этом, с геометрической точки зрения, производная функции в точке x_0 численно равна тангенсу угла наклона касательной к графику функции в данной точке и, соответственно, ее угловому коэффициенту: $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\operatorname{tg}\varphi=k$. (1)

Дифференциалом функции dy в точке x_0 называют *главную линейную* часть приращения функции Δy . На чертеже дифференциал dy в точке x_0 равен **длине** отрезка MN .

Пусть точка *N* сколь угодно близко стремится к точке *K*, т.е. Δx становится сколь угодно мало:



По рисунку хорошо видно, что с уменьшением Δx уменьшается и приращение функции $\Delta y = LN$ (малиновые линии). При этом отрезок LN занимает всё меньшую и меньшую часть приращения функции $\Delta y = LN$, а наш дифференциал $dy = NM$ – всю большую и большую его часть, именно поэтому его и называют **главной частью** приращения функции. Настолько главной, что при бесконечно малом Δx дифференциал стремится к полному приращению функции: $dy \to \Delta y$ (соответственно отрезок LN будет бесконечно малым).

Наиболее часто понятие дифференциала используется при приближенных вычислениях некоторой непрерывной функции в какой-либо точке, в которой функция не может быть вычислена точно.

Пусть в некоторой точке x_0 функция $y = f(x)$ вычислима с необходимой точностью. И пусть задано некоторое отклонение от этой точки Δx . Тогда справедлива следующая формула, вытекающая непосредственно из определения производной и дифференциала:

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\cdot\Delta x \qquad (3) \qquad \mathbf{(1.1)}$$

При этом точность данной формулы зависит только от величины Δx - чем меньше это значение, тем более точное значение функции мы получим. Пример, иллюстрирующий данную формулу будет приведен ниже, в параграфе 3, пример 9.

Стоит отметить, что в качестве точки x_0 может быть взята любая точка рассматриваемого интервала. Поэтому, заменяя в определении производной x_0 на x, получаем, что в общем случае производная может быть вычислена по следующей формуле: $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$. (4) Для всех основных элементарных функций существует таблица производных, для функций более сложного вида – правила дифференцирования.

Во многих экономических задачах также используются следующие свойства производной.

Рассмотрим некоторую точку x_0 области определения функции $y = f(x)$. Пусть функция дифференцируема в данной точке. Тогда:

1) Если $f'(x_0) > 0$, то функция $y = f(x)$ возрастает в точке x_0. И, очевидно, существует *интервал* (пусть даже очень малый), содержащий точку x_0, на котором функция $y = f(x)$ также возрастает.

2) Если $f'(x_0) < 0$, то функция $y = f(x)$ убывает в точке x_0. И существует интервал, содержащий точку x_0, на котором функция $y = f(x)$ также убывает.

3) Если $f'(x_0) = 0$, то *бесконечно близко* около точки x_0 функция $y = f(x)$ сохраняет свою скорость постоянной. Так бывает у функции-константы и ***в критических точках функции***, в частности ***в точках минимума и максимума***.

2. Производная и дифференциал в экономической теории.

1. Предельные величины. Применение производной в экономике позволяет получать так называемые предельные характеристики экономических объектов или процессов. Предельные величины (предельная полезность, производительность, предельный доход, продукт и др.) характеризуют не состояние, а скорость изменения экономического объекта или процесса по времени или относительно другого исследуемого фактора и выражают прирост соответствующего показателя в расчете на единицу прироста определяющего его фактора.

Рассмотрим данное понятие на примере ***издержек производства.*** Предельные издержки характеризуют приближенно дополнительные затраты на производство единицы дополнительной продукции. Если издержки производства рассматривать как функцию от выпускаемой продукции *x*, т.е. $y = C(x)$, то $y' = C'(x)$ будет выражать предельные издержки производства и приближённо характеризовать прирост переменных затрат на производство дополнительной единицы продукции. Средние издержки являются издержками на единицу выпуска продукции: $y_1 = \frac{C(x)}{x}$.

Аналогично могут быть определены другие предельные показатели: предельная выручка, предельная себестоимость, предельная производительность, предельный доход, предельный спрос и др

2. Производительность труда. Пусть функция $u(t)$ выражает объём произведённой продукции *y* за время *t*. Тогда производная объёма произведённой продукции по времени $u'(t_0)$ есть производительность труда в момент t_0. Производительностью труда называется количество продукции, изготовленное за единицу времени.

Здесь необходимо учитывать тот факт, что данная величина может быть равно нулю и даже может быть отрицательной, при этом скорость производительности (см. понятие 1) и ее темп (см. понятие 4) также могут быть отрицательными. В приложении 1 приведена цитата из газеты «Коммерсантъ» от 04.10.2010, где указываются конкретные числа роста производительности труда в РФ в 2008-2009 гг., наглядно демонстрирующие это явление.

Модельный пример 4 будет рассмотрен ниже.

3. Функция потребления и сбережения. Если *x* — совокупный национальный доход некоторой страны, $C(x)$ — функция потребления (та часть дохода, которая тратиться населением на оплату своих нужд), а $S(x)$ — функция сбережения (та часть дохода, которая откладывается на некоторый срок для дальнейших более крупных вложений), то:

$$x = C(x) + S(x). \qquad \textbf{(2.1)}$$

Дифференцируя, получим, что

$$\frac{dC}{dx} + \frac{dS}{dx} = 1, \qquad \textbf{(2.2)}$$

где $\frac{dC}{dx}$ — предельная склонность к потреблению;

$\frac{dS}{dx}$ — предельная склонность к сбережению.

Данная модель называется моделью внутреннего баланса.

Если предельная склонность к потреблению значительно превышает предельную склонность к сбережению – то это означает повышение спроса к товарам повседневного назначения и отсутствие спроса на товары длительного пользования (техника, автомобили, недвижимость), вследствие чего данное производство и все, что с ним связано, приходит в упадок. Более того, при длительном нерегулируемом увеличении предельной склонности к потреблению происходит истощение совокупного национального дохода.

В противном случае (неконтролируемое увеличение склонности к сбережению) – возникает так называемый «синдром Плюшкина». Т.е. все средства отправляются в сбережения, в то время как ежедневное потребление стремится к минимальному значению, что в свою очередь так же ведет к упадку производства и сокращению совокупного национального дохода.

Далее на примерах 2 и 3 будет показано, как это происходит в числах.

4. Эластичность. Это мера регулирования одной переменной величины на изменение другой. *Эластичность* функции приближённо показывает, на сколько процентов изменится одна переменная в результате изменения другой переменной на 1%.

Эластичность функции определяется с помощью соотношения:

$$E_x(y) = \frac{x}{y} \cdot y' \text{ или } E_x(y) = x \cdot T_y, \qquad \textbf{(2.3)}$$

где

$$T_y(x) = (\ln y)' = \frac{1}{y} y'_x \qquad \textbf{(2.4)}$$

— *относительная скорость изменения (темп)* функции.

Эластичность функции применяется при анализе спроса и предложения от цены (*ценовая эластичность*). Она показывает реакцию спроса или предложения на изменение цены и определяет, на сколько процентов приближённо изменится спрос или предложение при изменении цены на 1%.

Если эластичность спроса $|E_x(y)| > 1$, то спрос считается *эластичным*, если $|E_x(y)| = 1$ – нейтральным (*с единичной эластичностью*), а если $|E_x(y)| < 1$ – *независимым* относительно цены.

По сути это означает то, что если спрос эластичен, то дальнейшее незначительное увеличение цены приведет к его резкому спаду. В данном случае можно посоветовать несколько снизить цену на товар, тогда можно будет выиграть в прибыли за счет того, что спрос сильно возрастет.

И напротив, если спрос не эластичен – цену на товар можно поднимать, это не приведет к существенному снижению спроса.

Далее на примерах 5-6 это будет проиллюстрировано.

5. ***Функция издержек*** $C(x)$ определяет затраты, необходимые для производства x единиц данного продукта. ***Прибыль*** $P(x) = D(x) - C(x)$, где $D(x)$ – доход от производства x единиц продукта. Таким образом, ***оптимальным значением*** выпуска для производителя является то значение x единиц продукта, при котором прибыль $P(x)$ оказывается наибольшей.

По сути, данная задача сводится к нахождению экстремума функции прибыли, поэтому для нахождения данного значения необходимо:

- Найти первую производную $P'(x)$;
- Приравнять ее к нуль и решить полученное уравнение. Корни данного уравнения будут являться критическими точками в соответствии с необходимым условием существования экстремума.
- Найти вторую производную $P''(x)$ и определить ее знак в каждой критической точке. Если в некоторой точке $x_0=a$ выполняется $P''(x) > 0$, то данная точка является точкой минимума, если $P''(x) < 0$, то данная точка является точкой максимума (достаточное условие существования экстремума). Стоит отметить, что если $P''(x) = 0$, то рассматриваемая точка является перегибом функции и не влияет на экономический процесс.

Реализация данного алгоритма представлена в примерах 7,8.

3. Практическая реализация.

Пример 1. Функция издержек производства продукции некоторой фирмой имеет вид: $y = 0.1x^3 - 1.2x^2 + 5x + 250$ (ден.ед.). Найти средние и предельные издержки производства и вычислить их значение, если количество выпускаемой продукции $x = 10$.

Решение. Поскольку производная заданной функции $y' = 0.3x^2 - 2.4x + 5$ и это есть предельные издержки, а средние издержки равны

$$\overline{y} = \frac{0.1x^3 - 1.2x^2 + 5x + 250}{x} = 0.1x^2 - 1.2x + 5 + \frac{250}{x},$$

то, соответственно,

$$y'(10) = 0.3 \cdot 100 - 2.4 \cdot 10 + 5 = 11$$

$$\overline{y}(10) = 0.1 \cdot 100 - 1.2 \cdot 10 + 5 + 25 = 28$$

Это означает, что при данном уровне производства (количество выпускаемое продукции равно 10) средние затраты на производство одной единицы продукции составляют 28 ден. ед., а увеличение объема на одну единицу продукции обойдется фирме примерно в 11 ден. единиц. Объем производства увеличится всего лишь на 10%, а издержки более, чем на 30%. Стоит задуматься.

Пример 2. Функция потребления некоторой страны имеет вид: $C(x)=0.36x^{4/3}+0.25x+15x$, где x - совокупный национальный доход (ден.ед.). Найти предельную склонность к потреблению сбережению, если национальный доход составляет $x=27$ ден.ед.

Решение. Поскольку производная заданной функции $C'(x)=0.48x^{1/3}+0.25$ и это есть предельная склонность к потреблению, то предельная склонность к сбережению равна $S'(x)=1-C'(x)=0.75-0.48x^{1/3}$. Тогда

$C'(27)=0.48\cdot 3+0.25=1.69$

$S'(27)=0.75-0.48\cdot 3=-0.69$

Данный факт означает, что население не просто тратит все, что зарабатывает, но и даже то, что было отложено в сбережения ранее. Данная ситуация является критической.

Пример 3. Функция потребления некоторой страны имеет вид: $C(x)=0.37x^{4/5}+0.25x+13$, где x - совокупный национальный доход (ден.ед.). Найти предельную склонность к потреблению сбережению, если национальный доход составляет $x=32$ ден.ед.

Решение. Поскольку производная заданной функции $C'(x)=0.296x^{-1/5}+0.25$ и это есть предельная склонность к потреблению, то предельная склонность к сбережению равна $S'(x)=1-C'(x)=0.75-0.296x^{-1/5}$. Тогда

$C'(32)=0.296\cdot 0.5+0.25=0.398$

$S'(x)=0.75-0.296\cdot 0.5=0.602$

Данный факт означает, что население тратит на повседневные нужды около 40% дохода и откладывает в сбережения для дальнейших более серьёзных покупок около 60% дохода. Это достаточно благоприятная ситуация в стране.

Пример 4. Объем производства зимней обуви, выпускаемой некоторой фирмой, может быть описан уравнением $u(t)=\dfrac{1}{3}t^3-0.35t^2+6t+2100$ (ед), где t – календарный месяц года. Найти производительность труда, ее темп и скорость ее изменения на начало года, в конце третьего квартала и в конце года.

Решение. Поскольку

$z = u'(t) = t^2 - 7t + 6$ - производительность труда

$T = \frac{1}{z} \cdot z' = \frac{1}{t^2 - 7t + 6} \cdot (2t - 7)$ - темп изменения производительности

$z' = (2t - 7)$ - скорость изменения производительности

то результаты вычислений можно представить в виде следующей таблицы:

	z - производительность труда	T - темп изменения производительности	z' - скорость изменения производительности
$t = 0$	$z = 6$	$T = -7/6 \approx -1.667$	$z' = -7$
$t = 9$	$z = 24$	$T = 11/24 \approx 0.458$	$z' = 11$
$t = 12$	$z = 66$	$T = 17/66 \approx 0,258$	$z' = 17$

Поскольку задача ставилась о производстве зимней обуви – столь резкий рост производительности труда к концу года вполне оправдан, как и рост скорости производительности. Однако темп производительности (относительная скорость), действительно возросший к концу третьего квартала и составивший на этот момент более 45%, к концу года начал падать. Здесь подключается множество факторов, связанных с необходимостью торможения производства в конце зимнего сезона – следующая партия зимней обуви в большом количестве понадобится еще не скоро. Следовательно, данное производство является хорошо сбалансированным.

Пример 5. Функция спроса $q = \frac{3p + 14}{p + 3}$, и предложения $s = p + 2$ где q и s-количество товара, соответственно покупаемого и предлагаемого на продажу в единицу времени, а p – цена за единицу этого товара. Необходимо найти эластичность спроса и предложения, а также изменение дохода при увеличении на 10% от равновесной.

Решение.

Поскольку $q' = \frac{(3p+14)' \cdot (p+3) - (3p+14) \cdot (p+3)'}{(p+3)^2} = \frac{3p + 9 - 3p - 14}{(p+3)^2} = -\frac{5}{(p+3)^2}$, то

$E_q = \frac{p}{q} \cdot q' = p \cdot \frac{p+3}{3p+14} \cdot \left(-\frac{5}{(p+3)^2} \right) = -\frac{5p}{(p+3)(3p+14)}$ - эластичность спроса.

Поскольку $s' = 1$, то

$E_S = \frac{p}{s} \cdot s' = \frac{p}{p+2}$ - эластичность предложения.

Цена называется равновесной, если спрос равен предложению, следовательно

$$\frac{3p+14}{p+3} = p + 2$$

$p^2+2p-8=0$, $\Rightarrow p_1=2$, $p_2=-4$

Поскольку второй корень является посторонним (невозможность отрицательной цены), равновесной ценой является $p=2$.

В этом случае значения эластичностей $E_q=-0.1$, $E_S=0.5$, т.е. оба эти значения при равновесной цене не эластичны и изменение цены не приведет к резкому изменению ни спроса, ни предложения.

Попробуем увеличить цену на 10%. Тогда спрос уменьшиться на $E_q=|-0.1|\cdot 10=1\%$, однако доход $p\cdot q$ возрастет на $2.2\cdot\dfrac{3\cdot 2.2+14}{2.2+3}\approx 8.715\%$.

Пример 6. Зависимость между спросом q и ценой p за единицу продукции, выпускаемым некоторым предприятием, задается соотношением $q=18-\sqrt{p}$. Найти эластичность спроса. Выяснить при каких значениях спрос является эластичным, не эластичным и нейтральным. Дать рекомендации руководителю предприятия при $p=100$ и $p=150$ ден. ед.

Решение.

Поскольку эластичность спроса

$$E_q=\frac{p}{q}\cdot q'=\frac{p}{18-\sqrt{p}}\cdot\left(-\frac{1}{2\sqrt{p}}\right)=-\frac{\sqrt{p}}{36-2\sqrt{p}}$$

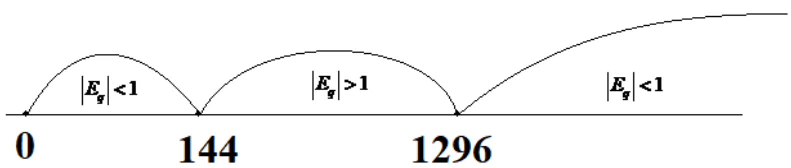
возьмем данную величину по модулю и приравняем ее к единице – найдем точки нейтральной эластичности.

$$\left|-\frac{\sqrt{p}}{36-2\sqrt{p}}\right|=1$$

$$-\frac{\sqrt{p}}{36-2\sqrt{p}}=1 \text{ или } -\frac{\sqrt{p}}{36-2\sqrt{p}}=-1$$

$p=36^2=1296$ или $p=12^2=144$

Для определения интервалов эластичности воспользуемся методом интервалов, с той разницей, что критическими будут точки нейтральной эластичности и значение будем сравнивать с 1, а не с 0.



Таким образом, интервалы эластичности и неэластичности очевидны.

Рекомендации. Если $p = 100$, то спрос является неэластичным и можно поднять цену продукции, выручка при этом будет продолжать расти. Однако при $p = 150$ спрос является эластичным, т.е. малейшее поднятие цены повлечет за собой резкий спад спроса. В этом случае цену рекомендуется снизить и выручка возрастет вследствие возросшего спроса на товар.

Пример 7. При производстве монополией x единиц товара цена за единицу составляет $p(x) = 8 - \sqrt{x}$. Определить оптимальное для монополии значение выпуска в предположении, что весь произведенный товар будет реализован, и максимальную прибыль данного производства, если издержки производства составляют

$$C(x) = 10 + x + \frac{x^2}{2}$$

Решение.

Доход данного производства равен $D(x) = x \cdot p(x) = x \cdot (8 - \sqrt{x}) = 8x - x^{3/2}$.

Прибыль данного производства

$$P(x) = D(x) - C(x) = 8x - x^{3/2} - 10 - x - \frac{x^2}{2} = -x^{3/2} - \frac{x^2}{2} + 7x - 10$$

$$P'(x) = -\frac{3}{2}x^{1/2} - x + 7$$

$-\frac{3}{2}x^{1/2} - x + 7 = 0$ или

$2x + 3x^{1/2} - 14 = 0$, откуда

1) $x^{1/2} = 2 \quad \Rightarrow x = 4$

2) $x^{1/2} = -7/2$ - посторонний корень.

Однако, необходимо проверить, действительно ли производство $x = 4$ единиц товара дает максимальную прибыть. Для этого найдем вторую производную и определим ее знак при $x = 4$:

$$P''(x) = -\frac{3}{4}x^{-1/2} - 1$$

$P''(4) = -\frac{3}{8} - 1 = -11/8 < 0$, т.е. $x = 4$ является точкой максимума.

Следовательно, оптимальным выпуском является $x = 4$ единиц товара. Найдем максимальную прибыль, соответствующую этому значению.

$P(4) = -4^{3/2} - \frac{4^2}{2} + 7 \cdot 4 - 10 = 2$ (усл. ед) – максимальная прибыль.

Пример 8. Функция прибыли некоторого предприятия может быть смоделирована следующей зависимостью:

$P(x) = x^2 - 8x + 10$

Выяснить оптимальный объем производства этого предприятия и сделать вывод.

Решение.

$P'(x) = 2x - 8$

т.е. критической точкой является $x = 4$. Однако,

$P''(x) = 2$ и $P''(4) = 2 > 0$, т.е. данная критическая точка является точкой минимума.

Вывод. Необходимо дополнительное исследование производственных мощностей предприятия. Если предприятие не способно выпускать более 4х единиц продукции за рассматриваемый период, то лучшим решением для предприятия будет не производить ничего, а доход получать, например, от сдачи площадей в аренду. Если же предприятие способно производить за рассматриваемый период более 4х единиц продукции – оптимальным решение будет выпуск на пределе производственных мощностей.

Пример 9. Зависимость объема выпуска (в денежных единицах) продукции V от капитальных затрат x определяется формулой:

$V(x) = \frac{3}{4}\ln(1 + x^3)$

Вычислить объем выпуска при $x = 0.5$.

Решение. Поскольку $0.5^3 = 0.125$, то для вычисления объема можно воспользоваться формулой (1.1) приближенных вычислений с помощью дифференциала.

В качестве x_0 возьмем значение 0, в качестве Δx - значение 0.125, тогда в качестве функции $f(x)$ рассмотрим преобразованную функцию объема $f(x) = \frac{3}{4}\ln(1 + x)$ и по формуле (1.1) получим:

$x_0 = 0$, $\Delta x = 0.125$, $f(x_0) = f(0) = \frac{3}{4}\ln(1) = 0$

$f'(x) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{1 + x}$, $f'(x_0) = f'(0) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{1} = 0.75$

$V(0.5) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x = 0 + 0.75 \cdot 0.125 = 0.09375$

Проверим данное значение с помощью калькулятора. Получим, что $V(0.5) \approx 0.08834$. Округляя оба числа до второго знака после запятой по правилам округления, получаем один и тот же результат.

Для проверки гипотезы о том, что чем меньше значение Δx, тем более точна формула (1.1) проведем те же вычисления для значения капитальных затрат $x = 0.1$. Получаем:

$x_0 = 0$, $\Delta x = 0.001$, $f(x_0) = f(0) = \frac{3}{4}\ln(1) = 0$

$f'(x) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{1+x}$, $f'(x_0) = f'(0) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{1} = 0.75$

$V(0.2) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x = 0 + 0.75 \cdot 0.001 = 0.00075$

в то время как на калькуляторе $V(0.1) \approx 0.0007496$, т.е. в данном случае уже допускается округление до пятого знака после запятой.

Заключение.

Итак, экономический смысл производной заключается в том, что производная выступает как скорость изменения некоторого экономического процесса с течением времени или относительно другого исследуемого фактора. Более того – незначительное изменение начального состояния может привести к достаточно серьезным изменениям во всём дальнейшем процессе.

При этом необходимо понимать, что предельные или пограничные величины характеризуют не состояние (как суммарная или средняя величины.), а сам процесс, по сути - изменение экономического объекта. Следовательно, производная выступает как интенсивность изменения некоторого экономического объекта (процесса) по времени или относительно другого исследуемого фактора.

Наиболее актуальным является использование производной в предельном анализе, то есть при исследовании предельных величин (предельные издержки, предельная выручка, предельная производительность труда или других факторов производства и т. д.).

Производная находит широкое приложение в экономической теории, поскольку многие, в том числе и базовые законы теории производства и потребления, спроса и предложения оказываются прямыми следствиями более серьезных математических теорем, изучаемых в высшей школе (например, представляет интерес экономическая интерпретация теоремы Вейерштрасса, выпуклости функции и т.д.).

Знание производной позволяет решать многочисленные задачи по экономической теории, в частности, вопросы минимизации убытков, максимизации прибыли, нахождении оптимального выпуска продукции предприятие и т.д.

Список литературы.

1. Малыхин В. Л. Математика в экономике. — М.: ИНФРА-М, 2001.
2. Розен В. В. Математические модели принятия решений в экономике. — М.: Книжный дом «Университет». Высш. шк., 2002
3. Солодовников А. С., Бабайцев В. А., Браилов А. В. Математика в экономике. В 2-х ч. — М.: Финансы и статистика, 2001
4. Замков О. О., Толстопятенко А. В., Черемных Ю. Н. Математические методы в экономике 3-е изд., М.: Дело и Сервис, 2001.
5. В. Л. Клюшин, Высшая математика для экономистов, учебное пособие, Москва, ИНФРА-М, 2009г.
6. В. И. Малыхин, Высшая математика, учебное пособие, Москва, ИНФРА-М, 2009г.
7. Красс М.С., Чупырков Б.П. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании. М: Дело, 2001.
8. Н.Ш. Кремер. Высшая математика для экономистов. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2006.

Приложение 1.

«Коммерсантъ» от 04.10.2010.

Росстат актуализировал данные по производительности труда в РФ. Из них следует, что впервые за семь лет рост производительности труда в кризис существенно снизился и в 2009 году достиг отрицательного значения — минус 4,2%.

"Падение производительности труда — характеристика кризисного явления, но показатель 4,2% в 2009 году близок к удовлетворительному. В предыдущие кризисы 1990-х годов падение производительности было более глубоким",— отмечает ведущий эксперт Центра макроэкономического анализа и краткосрочного прогнозирования Игорь Поляков.

Рецензия.

Содержание работы ученика 11В класса МБОУ ЛСТУ №2 г.Пензы Фёдорова Глеба полностью соответствует избранной теме: «Применение основ дифференциального исчисления в экономической теории». В работе тема раскрыта полностью, проведена большая исследовательская работа по изучению и обобщению материала, видна хорошая математическая подготовка учащегося.

Грамотно обоснованы причины и актуальность выбора темы. В частности, обращено внимание на то, что помимо необходимости умения моделировать несложные экономические прогнозы хотя бы на небольшой период времени, необходимо учитывать множество не заложенных изначально факторов, которые могут возникнуть в ходе того или иного экономического процесса. Достаточно часто встречающееся во многих моделях понятия дифференциалов и производных предполагает, что незначительное изменение некоторых параметров на начальном этапе могут сильно воздействовать на весь процесс в дальнейшем. Поскольку на практике это достаточно часто происходит – необходимо понимание того, насколько подобные изменения (стремящиеся в пределе к нулю) влияют на основную модель.

В работе рассмотрены задачи, которые можно применять на интегрированных уроках математики и обществознания для учащихся старшего звена, уже владеющих основами математики и экономической теории, с вопросами применения основных математических понятий анализа в некоторых разделах экономики, в частности, в предельном анализе, теории эластичности и вычислении критических значений экономических величин.

.

Рецензент:	Хальметова Наиля Ханифовна
Место работы:	МБОУ ЛСТУ №2 г. Пензы
Должность:	Учитель математики, высшая квалификационная категория
Научная степень:	------------------------------
Домашний адрес:	г.Пенза, ул. Мереняшева, 158
Телефон:	+79374471357

Подпись: ______________________________ /Н.Х.Хальметова/

Директор МБОУ ЛСТУ №2 ______________________________ /Т.Н.Попкова/