Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение
средняя общеобразовательная школа №20

Оценка
в решении уравнений
и неравенств

Выполнила:
Филиппова Диана
МБОУ СОШ №20, 10 класс

Руководитель:
Мандрыченко Олег Борисович
учитель математики МБОУ СОШ №20

Пенза 2024

Содержание:

1. Введение.

Не всякое уравнение (неравенство) в результате преобразований может быть сведено к уравнению (неравенству) того или иного стандартного вида, для которого существует известный стандартный алгоритм решения. В таких случаях оказывается полезным использовать другие методы решения, которые и будут рассмотрены в данной работе.

Когда заходит разговор о применении оценки для решения математических задач, то сразу вспоминают метод мажорант (метод оценки). Однако многие при этом забывают, что это лишь один из многих методов решения, использующих оценку в своей основе. Существуют и другие возможности решить задачу, используя оценку, связанную с ограниченностью функции.

Целью данной работы является ознакомление с возможностью использования различных приёмов оценки, связанных с ограниченностью функции, для решения нестандартных уравнений и неравенств.

Задачи исследования:

- рассмотреть применения метода оценки (метод мажорант) для решения уравнений и неравенств;
- познакомиться с основными неравенствами, связанными с ограниченностью функции;
- показать применение основных неравенств к решению математических задач.

Объектом исследования являются уравнения и неравенства, не поддающиеся решению с помощью стандартных методов, или отличающиеся громоздкостью стандартного решения.

Субъектом исследования является оценка ограниченности функции как способ решения нестандартных уравнений и неравенств.

Гипотеза исследования основана на том, что использование оценки является хорошим помощником для решения нестандартных уравнений и неравенств.

В работе применялись аналитический и сравнительный методы исследования.

Актуальность и практическая значимость работы заключается в том, что не всегда при решении сложных задач имеется возможность применения стандартных способов, а, следовательно, требуется владение и нестандартными методами. Однако применять их нужно очень внимательно, чтобы избежать возможных ошибок.

2. Основная часть.

2.1. Основные неравенства, связанные с ограниченностью функций.

1) $\dfrac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$ (неравенство Коши) для любых неотрицательных a и b, причём равенство достигается только при $a = b$.
2) $a^2 + b^2 \ge 2ab$ для любых действительных a и b, равенство достигается только при $a = b$.
3) $ax^2 + bx + c = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 + c - \dfrac{b^2}{4a^2} \ge c - \dfrac{b^2}{4a^2}$ при $a > 0$;

   $ax^2 + bx + c = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 + c - \dfrac{b^2}{4a^2} \le c - \dfrac{b^2}{4a^2}$ при $a < 0$.
4) $|x| \ge 0$ при любых действительных x; $\sqrt{x} \ge 0$ при любых неотрицательных x.
5) $x + \dfrac{1}{x} \ge 2$ при $x > 0$, равенство достигается только при $x = 1$;

   $x + \dfrac{1}{x} \le -2$ при $x < 0$, равенство достигается только при $x = -1$.
6) $|\sin x| \le 1, \quad |\cos x| \le 1$ при любых действительных x.
7) $|a\sin x + b\cos x| \le \sqrt{a^2 + b^2}$ при любых действительных a, b, x.
8) $-\dfrac{\pi}{2} \le \arcsin x \le \dfrac{\pi}{2}, \quad 0 \le \arccos x \le \pi, \quad -\dfrac{\pi}{2} < arctgx < \dfrac{\pi}{2}, \quad 0 < arcctgx < \pi$.

2.2. Задания, решаемые с помощью простой оценки.

Достаточно часто уравнение или неравенство можно решить, применив простую оценку, основанную на заданных условиях, или опирающуюся на совпадение знаков левой и правой части.

Задача 1. Найдите значение выражения $\sqrt{100 - 20\cdot 6^x + 36^x} - 6^x - 2{,}5$, если $4^x = 19$.

Решение. Упростим данное выражение. Заметим, что под корнем находится квадратный трёхчлен, являющийся полным квадратом. Поэтому при решении придётся вспомнить следующие формулы: $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$ и $\sqrt{x^2} = |x|$.

$$\sqrt{100 - 20\cdot 6^x + 36^x} - 6^x - 2{,}5 = \sqrt{(10 - 6^x)^2} - 6^x - 2{,}5 = \left|10 - 6^x\right| - 6^x - 2{,}5$$

Теперь обратим внимание на условие $4^x = 19$, из которого следует, что $x > 2$. Это означает выполнение неравенства $10 - 6^x < 0$ и модуль однозначно раскрывается со знаком минус: $-(10 - 6^x) - 6^x - 2{,}5 = -10 + 6^x - 6^x - 2{,}5 = -12{,}5$.

Ответ: -12,5.

Задача 2. Решите уравнение $\left|x^3 - 4\right| + \left(9 + x^6\right)\left(5 + x^3\right)^2 = 4 - x^3$.

Решение. Левая часть уравнения представляет собой сумму двух неотрицательных функций. Следовательно, правая часть так же неотрицательна, т.е. $4 - x^3 \ge 0$. Но тогда раскрываем модуль с «минусом» $\left|x^3-4\right|=4-x^3$, и после упрощения уравнение принимает вид $\left(9+x^6\right)\left(5+x^3\right)^2=0$

. Откуда получаем корень $x=-\sqrt[3]{5}$.

Ответ: $-\sqrt[3]{5}$.

Задача 3. Решите неравенство $\sqrt{2x+y-1}+\sqrt{x-2y+7}\le 0$.

Решение. Каждое из двух слагаемых, расположенных в левой части, неотрицательно, следовательно, неотрицательна и вся левая часть неравенства и оно имеет решение только при одновременном равенстве нулю обоих слагаемых. Получаем систему линейных уравнений

$\begin{cases}2x+y-1=0\\ x-2y+7=0\end{cases}$, решая которую традиционными методами, получаем пару $\begin{cases}x=-1\\ y=3\end{cases}$.

Ответ: (-1; 3).

2.3. Метод мажорант (метод оценки).

Мажорантой (от ***magiorante*** – главенствующий) данной функции $f(x)$ на заданном промежутке называется такое число M, что либо $f(x)\le M$ для всех x из данного промежутка, либо $f(x)\ge M$ для всех x из данного промежутка.

Если удается показать, что на области определения уравнения $f(x)=g(x)$ функция $f(x)\ge M$ а функция $g(x)\le M$ (или наоборот), то уравнение равносильно системе $\begin{cases}f(x)=M\\ g(x)=M\end{cases}$.

Достаточно решить только одно уравнение системы (как правило, более лёгкое), а для второго сделать проверку найденных корней.

Задача 4. Решите уравнение $16x^2+24x+12=\left(\sqrt{3}-\cos\dfrac{14\pi x}{3}\right)\left(\sqrt{3}+\cos\dfrac{14\pi x}{3}\right)$.

Решение. Оценим левую часть уравнения. Для этого выделим полный квадрат в квадратном трёхчлене $16x^2+24x+12=16x^2+24x+9+3=(4x+3)^2+3$. Так как $(4x+3)^2\ge 0$, то $(4x+3)^2+3\ge 3$.

Теперь оценим правую часть: $\left(\sqrt{3}-\cos\dfrac{14\pi x}{3}\right)\left(\sqrt{3}+\cos\dfrac{14\pi x}{3}\right)=3-\cos^2\left(\dfrac{14\pi x}{3}\right)$.

$0\le\cos^2\left(\dfrac{14\pi x}{3}\right)\le 1$, $\quad -1\le-\cos^2\left(\dfrac{14\pi x}{3}\right)\le 0$, $\quad 2\le 3-\cos^2\left(\dfrac{14\pi x}{3}\right)\le 3$.

Получаем: $\begin{cases}(4x+3)^2+3\ge 3\\ 3-\cos^2\left(\dfrac{14\pi x}{3}\right)\le 3\\ (4x+3)^2+3=3-\cos^2\left(\dfrac{14\pi x}{3}\right)\end{cases}$, или $\begin{cases}(4x+3)^2+3=3\\ 3-\cos^2\left(\dfrac{14\pi x}{3}\right)=3\end{cases}$.

Решаем первое уравнение системы и получаем корень $x=-0{,}75$.

Проверкой устанавливаем, что найденный корень удовлетворяет второму уравнению системы.
Ответ: - 0,75.

Задача 5. Решите уравнение: $\log_2\left((x-2)^2+4\right)=2-\sin^2 5\pi x.$

Решение. Воспользуемся методом оценок. Обозначим левую и правую часть неравенства

$$f(x)=\log_2\left((x-2)^2+4\right), \qquad g(x)=2-\sin^2 5\pi x.$$

Найдем области их значений.

1) $f(x)=\log_2\left((x-2)^2+4\right)$: $(x-2)^2\ge 0;$ $\qquad (x-2)^2+4\ge 4;$

Так как функция $y=\log_2 t$ возрастающая, то

$$\log_2\left((x-2)^2+4\right)\ge \log_2 4;\ \ \log_2\left((x-2)^2+4\right)\ge 2;\ \ f(x)\ge 2.$$

2) $g(x)=2-\sin^2 5\pi x;$ $\ 0\le \sin^2 5\pi x\le 1;$ $\ -1\le -\sin^2 5\pi x\le 0;$ $\ 1\le 2-\sin^2 5\pi x\le 2;$ $\ g(x)\le 2.$

Заданное уравнение равносильно системе: $\begin{cases} f(x)\ge 2; \\ g(x)\le 2; \\ f(x)=g(x.) \end{cases} \Leftrightarrow f(x)=g(x)=2.$

3) Решим уравнение

$$\log_2\left((x-2)^2+4\right)=2,\quad (x-2)^2+4=4;\quad (x-2)^2=0,\quad x=2.$$

Значит, $f(2)=2.$ Проверим будет ли верным равенство $g(2)=2.$

$g(2)=2-\sin^2(5\pi\cdot 2)=2-\sin^2 10\pi=2-0=2.$ Верно.

Значит, $x=2$ - решение уравнения.
Ответ: 2.

Решение неравенств методом мажорант основано на том же принципе, что и решение уравнений. Только требуется соблюдать обязательное условие: меньшая по условию величина должна быть больше или равна числу М, а большая – меньше или равна этому же числу.

Задача 6. Решить неравенство $2^{3-2x+x^2}\le 3+2x-x^2$**.**

Решение. Оценим правую часть неравенства. Выделим полный квадрат из квадратного трёхчлена $-x^2+2x+3=-\left(x^2-2x+1\right)+1+3=-(x-1)^2+4$ и оценим справа $-(x-1)^2+4\le 4$.

Теперь оценим левую часть. Для этого вначале оценим квадратный трёхчлен в показателе $x^2-2x+3=(x-1)^2+2\ge 2$, а затем и саму функцию $2^{3-2x+x^2}\ge 2^2$ или $2^{3-2x+x^2}\ge 4$ **(**знак неравенства сохраняется, так как основание больше 1 и показательная функция возрастает). Требуемое условие получено. Можно составлять систему уравнений $\begin{cases} -(x-1)^2+4=4 \\ 2^{3-2x+x^2}=4 \end{cases}$. Решением первого уравнения является корень $x = 1$. Проверкой устанавливаем, что он является решением и второго уравнения системы.
Ответ: 1.

Задача 7. Решить неравенство $7^{-|x-3|}\cdot\log_2\left(6x-x^2-7\right)\ge 1$.

Решение. Разделим обе части неравенства на $7^{-|x-3|}$. Это можно сделать, так как показательное выражение по определению больше нуля. Получим $\log_2\left(6x-x^2-7\right)\ge 7^{|x-3|}$.

Оценим правую часть: $|x-3|\ge 0$, следовательно $7^{|x-3|}\ge 7^0$ (7 > 1 и показательная функция возрастает) или $7^{|x-3|}\ge 1$.

Для оценки левой части оценим предварительно квадратный трёхчлен под знаком логарифма:
$-x^2+6x-7=-\left(x^2-6x+9\right)+2=-\left(x-3\right)^2+2\le 2$.

Теперь можно оценить и сам логарифм при условии, что его основание больше 1, он возрастает и знак сравнения не изменяется $\log_2\left(-(x-3)^2+2\right)\le\log_2 2$ или $\log_2\left(-(x-3)^2+2\right)\le 1$.

Составим систему уравнений $\begin{cases}7^{|x-3|}=1\\ \log_2\left(-(x-3)^2+2\right)=1\end{cases}$. Легко видеть, что решением первого уравнения является число 3. Проверкой устанавливаем, что оно является решением и второго уравнения.

Ответ: 3.

2.4. Неравенство Коши (неравенство о средних).

$$\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab} \text{ для любых } a,\ b\ge 0.$$

Доказывается оно очень просто: $a+b\ge 2\sqrt{ab}$

Поскольку $a + b \ge 0$, значит обе части неравенства можно возводить в квадрат:

$(a + b)^2 \ge 4ab$, $a^2 + 2ab + b^2 \ge 4ab$, $a^2 + 2ab + b^2 - 4ab \ge 0$, $a^2 - 2ab + b^2 \ge 0$, $(a - b)^2 \ge 0$.

Итак, исходное неравенство верно для любых $a,\ b \ge 0$.

Применим неравенство Коши для решения некоторых задач.

Задача 8. Доказать, что при $a>0, b>0, c>0$ имеет место неравенство

$$\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(a+c\right)\ge 8abc.$$

Доказательство. Запишем неравенство Коши для пар чисел a и b, b и c, a и c:

$$a+b\ge 2\sqrt{ab};\quad b+c\ge 2\sqrt{bc};\quad a+c\ge 2\sqrt{ac}.$$

Так как левая и правая части этих неравенств при заданных условиях положительны, то эти неравенства одинакового смысла можно перемножить почленно, в результате чего получим $\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(a+c\right)\ge 8\sqrt{ab}\sqrt{bc}\sqrt{ac}$ или $\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(a+c\right)\ge 8abc$. **Неравенство доказано.**

Задача 9. Сравнить $\lg 7\cdot\lg 13$ и 1.

Решение. Так как $\lg 7$ и $\lg 13$ - неравные положительные числа, то можно рассмотреть неравенство Коши $\dfrac{\lg 7+\lg 13}{2}>\sqrt{\lg 7\cdot\lg 13}$.

Оценим левую часть неравенства $\dfrac{\lg 7+\lg 13}{2}=\dfrac{\lg(7\cdot 13)}{2}=\dfrac{\lg 91}{2}<\dfrac{\lg 100}{2}=\dfrac{2}{2}=1$.

Таким образом $1 > \dfrac{\lg 7 + \lg 13}{2} > \sqrt{\lg 7 \cdot \lg 13}$ или $1 > \sqrt{\lg 7 \cdot \lg 13}$. Так как левая и правая части неравенства положительны, их можно возвести в квадрат и окончательно получить сравнение

$$1 > \lg 7 \cdot \lg 13.$$

Задача 10. Решите уравнение $\dfrac{x^2 + 13x + 4}{x+2} = 6\sqrt{x}$.

Решение. Уравнение задано при $x \geq 0$ и при этом условии его левая часть всегда положительна. Преобразуем левую часть: $\dfrac{x^2+13x+4}{x+2} = \dfrac{\left(x^2+4x+4\right)+9x}{x+2} = x+2+\dfrac{9x}{x+2}$. Согласно неравенству Коши имеем $x+2+\dfrac{9x}{x+2} \geq 2\sqrt{\left(x+2\right)\cdot\dfrac{9x}{x+2}} = 6\sqrt{x}$. Равенство достигается, когда равны слагаемые левой части, т.е. $x+2 = \dfrac{9x}{x+2}$. Далее приходим к уравнению $x^2 - 5x + 4 = 0$, для которого легко находятся корни: 1 и 4.

Ответ: 1; 4.

Задача 11. Решите уравнение $\sqrt[4]{1-x^2} + \sqrt[4]{1-x} + \sqrt[4]{1+x} = 3$.

Решение. Уравнение задано на отрезке [-1; 1]. Используя неравенство Коши, оценим его сверху на этом отрезке:

$$\sqrt[4]{1-x^2} + \sqrt[4]{1-x} + \sqrt[4]{1+x} \leq \frac{\sqrt{1-x}+\sqrt{1-x}}{2} + \frac{1+\sqrt{1-x}}{2} + \frac{1+\sqrt{1+x}}{2} =$$

$$= \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} + 1 \leq \frac{1+1-x}{2} + \frac{1+1+x}{2} + 1 = 3.$$

Равенство имеет место при выполнении следующих условий

$\sqrt{1-x} = \sqrt{1+x},\quad 1 = \sqrt{1-x},\quad 1 = \sqrt{1+x},\quad 1 = 1-x,\quad 1 = 1+x$, или при $x = 0$.

Но достижение равенства в оценках соответствует удовлетворению исходного уравнения. Следовательно, $x = 0$ – его единственный корень.

Ответ: 0.

2.5. Оценка выражения x + 1/x и её применение к решению задач.

Докажем, что наименьшее значение выражения $x + 1/x$ больше или равно 2 для положительных значений x.

Пусть $1/x = y$. Согласно неравенству Коши имеем

$$x + \frac{1}{x} = 2\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq 2\sqrt{xy} = 2\sqrt{\frac{x}{x}} = 2.$$

Итак, $x + \dfrac{1}{x} \geq 2$ для положительных x. Равенство достигается при $x = 1$.

Рассмотрим применение рассматриваемой оценки к решению задач.

Задача 12. Решите уравнение $\sqrt{x+\dfrac{4}{x}} + \sqrt{4y+\dfrac{1}{y}} = 4$.

Решение. Выполним небольшое преобразование для получения требуемого выражения:

$\sqrt{2\left(\frac{x}{2}+\frac{2}{x}\right)}+\sqrt{2\left(2y+\frac{1}{2y}\right)}=4$. Заметим, что выполнены условия $x>0, y>0$ и можно применить оценку для подкоренных выражений: $\frac{x}{2}+\frac{2}{x}\ge 2$ и $2y+\frac{1}{2y}\ge 2$. Но тогда возникает оценка и для самих радикалов: $\sqrt{2\left(\frac{x}{2}+\frac{2}{x}\right)}\ge 2$ и $\sqrt{2\left(2y+\frac{1}{2y}\right)}\ge 2$; откуда следует вывод, что уравнение имеет решение при выполнении условия $\begin{cases}\sqrt{2\left(\frac{x}{2}+\frac{2}{x}\right)}=2\\ \sqrt{2\left(2y+\frac{1}{2y}\right)}=2\end{cases}$. Решая каждое уравнение, получаем пару чисел $x=2, y=\frac{1}{2}$, являющихся решением данного.

Ответ: $x=2, y=\frac{1}{2}$.

Задача 13. Решить уравнение $\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{\sqrt{2-x}}\right)\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt{2-x}\right)=8$.

Решение. Для упрощения записи введём новые переменные $\sqrt{x}=a, \sqrt{2-x}=b$; $a,b>0$.

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{b}\right)\cdot(a+b)=8.$$

Раскрыв скобки и сделав соответствующую группировку получим новое уравнение

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)+\left(b+\frac{1}{b}\right)+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)=6.$$

Заметим, что можно применить известную оценку $\left(a+\frac{1}{a}\right)\ge 2,\ \left(b+\frac{1}{b}\right)\ge 2,\ \left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\ge 2$.

Равенство выполняется, только если каждая скобка равна 2, а это будет выполнено лишь при $a=b=1$, что, в свою очередь, равносильно системе $\begin{cases}a=1\\ b=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x}=1\\ \sqrt{2-x}=1\end{cases}\Leftrightarrow x=1$.

Ответ: 1.

Задача 14. Решите неравенство $\left(2-5^{x-2}-5^{2-x}\right)^{-1}\cdot\left(x^2-x-2\right)\cdot\sqrt{3-x}\ge 0$.

Решение. Преобразуем выражение в первой скобке $2-5^{x-2}-5^{2-x}=2-\frac{5^x}{5^2}-\frac{5^2}{5^x}=2-\left(\frac{5^x}{5^2}+\frac{5^2}{5^x}\right)$ и учтём отрицательный показатель. Неравенство примет вид $\frac{\left(x^2-x-2\right)\cdot\sqrt{3-x}}{2-\left(\frac{5^x}{25}+\frac{25}{5^x}\right)}\ge 0$.

Но $\left(\frac{5^x}{5^2}+\frac{5^2}{5^x}\right)\geq 2$ и знаменатель принимает отрицательные значения на всей области допустимых значений, кроме $x = 2$. Следовательно, неравенство равносильно системе $\begin{cases}\left(x^2-x-2\right)\cdot\sqrt{3-x}\leq 0\\ x\neq 2\end{cases}$.

Теперь ответ легко получить, решая полученное неравенство методом интервалов.

Ответ: $x\in\left[-1;2\right)\cup\left\{3\right\}$.

Задача 15. Найдите наименьшее значение функции

$$y=\frac{x^4+2x^3+3x^2+2x+2}{x^2+x+1}.$$

Решение. Область определения – все действительные числа (дискриминант знаменателя меньше нуля). Степень числителя больше степени знаменателя, поэтому можно выделить целую часть, выполнив деление столбиком. Получим:

$$y=x^2+x+1+\frac{1}{x^2+x+1}.$$

Введём замену $t=x^2+x+1$ и рассмотрим новую функцию $y=t+\frac{1}{t}$. При $x\in\left(-\infty;+\infty\right)$ новая переменная $t\in\left[\frac{3}{4};+\infty\right)$. Поэтому наименьшее значение исходной функции совпадает с наименьшим значением новой при $t\in\left[\frac{3}{4};+\infty\right)$. Но при $t>0$ имеет место оценка $t+\frac{1}{t}\geq 2$, причём равенство достигается при $t=1$. Так как это значение входит в область определения переменной t, то искомым наименьшим значением будет 2.

Можно найти, при каких значениях исходной переменной оно достигается. Для этого надо решить уравнение $x^2+x+1=1$. Его решением являются числа 0 и -1.

Ответ: наименьше значение равно 2 при x = -1 и x = 0.

3. Заключение.

Не всякое уравнение или неравенство может быть решено с использованием стандартных алгоритмов решения. В таких случаях приходится искать нестандартные способы решения, одним из которых и является оценка значений. Причём существуют различные виды оценки. В данной работе показано, как работает оценка при решении нестандартных уравнений и неравенств. При этом обращено внимание на разные виды оценки, к каждому из которых приведены примеры. Гипотеза исследования, основанная на том, что использование оценки является хорошим помощником для решения нестандартных уравнений и неравенств, подтверждена. Надеюсь, что изученная тема поможет мне и моим друзьям лучше подготовиться к участию в олимпиадах и сдаче выпускных и вступительных экзаменов.

4. Литература и источники.

1. Гальперин А.Л., Кумков С.С., Нохрин С.Э., Шевалдин В.Т. Неэлементарные задачи элементарной математики. Том 5. Олимпиадные задачи по алгебре. – Екатеринбург: ООО «Издательство УМЦ УПИ», 2021.

2. Берколайко С.Т. Использование неравенства Коши при решении задач.-М.:Квант,1975.-№4.

3. Далингер В.А. Классические неравенства. Омск. 2013

4. Гомонов С. А. Замечательные неравенства: способы получения и примеры применения: 10-11 классы. Учебное пособие. 2-е изд. - М.: 2006, 256 с.

5. Фалин Г.И., Фалин А.И., *Математика*, Издательский Дом «Первое Сентября», 2006, №10.

Интернет-ресурсы:

kvant.mccme.ru – архив номеров журнала «Квант».

pvg.mk.ru – олимпиада школьников «Покори Воробьёвы горы!»

Рецензия.

Содержание работы ученицы 10 класса МБОУ СОШ №20 Филипповой Дианы полностью соответствует избранной теме: «Оценка в решении уравнений и неравенств». В работе тема раскрыта полностью, проведена большая исследовательская работа по изучению и обобщению способов и методов решения задач с использованием различных приёмов оценки, связанных с ограниченностью функции, видна хорошая математическая подготовка учащегося.

Грамотно обоснованы причины и актуальность выбора темы. В частности, обращено внимание, что не всякое уравнение (неравенство) в результате преобразований может быть сведено к уравнению (неравенству) того или иного стандартного вида, для которого существует известный алгоритм решения.

Справедливо замечено, что помимо метода мажорант, который наиболее известен из оценочных методов, существуют и другие возможности решить задачу, используя оценку, связанную с ограниченностью функции.

В работе рассмотрено большое количество уравнений и неравенств, решаемых различными оценками (например, неравенством Коши). Отмечено, что для решения сложных задач требуется владение нестандартными методами их решения.

При проведении работы применялись аналитический и сравнительный методы исследования поставленной задачи.

Признавая необходимость практической значимости задач, решаемых с использованием оценки, можно сделать вывод об актуальности данной работы.

Рецензент:	Мандрыченко Олег Борисович
Место работы:	МБОУ СОШ №20
Должность:	Учитель математики, высшая квалификационная категория
Научная степень:	----------------------------
Домашний адрес:	г.Пенза, ул. Калинина, д.9, кв. 78
Телефон:	8 927 364 19 84

Подпись: ______________________________ /О.Б. Мандрыченко/

Директор МБОУ СОШ №20 ______________________________ /И.А. Николаева/

М.П.