

МБОУ «Лицей №55» г. Пензы

Исследовательская работа по математике на тему:

«Вперед и вверх – всегда ли так?»

Выполнил: Андрей Костенков

ученик 10 «Б» класса

Руководитель проекта:

Росеева Елена Витальевна

Пенза, 2023г.

Цель:

Улучшение общих результатов спортсменов в спортивном ориентировании за счет выбора оптимального метода подъема вверх по склону

Задачи:

- Выяснить все методы подъема вверх по склону.
- Рассчитать наиболее эффективный метод, в зависимости от крутизны склона.
- Проанализировать расчеты.
- Получить результаты на практике.
- Подвести итоги и сделать выводы.

Влияние рельефа на технику бега спортсмена.

Рельеф вносит большую долю в трудность местности. На самом незначительном подъеме скорость бега сама по себе возрастать не может. В тоже время пологий подъем, если он не слишком длинный, можно преодолеть без снижения скорости. А некрутой спуск пробегается быстрее, чем такой же отрезок по ровному месту.

Когда подъем становится круче, нагрузки растут, а резерв мощности может быть уже исчерпан. Скорость снижается. Падает она и на крутых спусках.

Круты ли наши горки?

Великое многообразие неровностей земной поверхности, рельеф, делает ориентирование намного интереснее, но в то же время и сильно его осложняет. Это сказывается на трудности преодоления дистанции в физическом плане и на технике бега.

Рассмотрим влияние крутизны склона на скорость бега и затраты сил спортсмена при его подъеме вверх по склону.

Существует три основных метода подъема: напрямую, наискось с упреждением и зигзагом.

Крутизна склонов влияет на способы передвижения по ним. Или, я полагаю, что только «Вперед и вверх»? Посмотрим, в плане крутизны, что может преподнести местность на дистанции соревнований.

Крутые и высокие склоны характерны для речных береговых уступов. Обрывистые и часто глинистые склоны оврагов крутые, до 30-35°. Типичная глубина оврагов до 15-20 метров. Но в иных местах с крупными формами рельефа, они могут быть значительно глубже, до 50-60 метров.

Для балок характера крутизна склонов от 12-15 до 25-35°, примерно как и для оврагов. Балки, это поздняя стадия развития оврагов, характерны для средней и южной полосы Русской равнины.

Обрывы бывают и песчаные. Если без травы и кустов, то до 26-30°, как у пустынных барханов или морских дюн. Подниматься по песчаному обрыву - как по эскалатору против его хода.

Боковые склоны скалистых гряд довольно крутые, до 25-30°. Высота гряд относительно прилегающих болот или озер — до 40 метров, а тянутся гряды, с перерывами, на многие километры.

Ручьи и речки или сухие русла бывают с довольно значительным уклоном, до 15-20° в самой верхней части. Вниз по течению он уменьшается, примерно до 10° в средней части, и так далее.

Боковые отроги горных хребтов (косогоры) могут быть самые разные, как горизонтальные, так и падающие под углом до 35°. Но бывают и плоские верховья, и длинные гряды с пологим гребнем и пригорками по нему.

Если, ради спортивного интереса, посмотреть карты соревнований территории альпийских стран Европы, то можно составить такую примерную характеристику местности. Абсолютные высоты района соревнований 1000-1500 метров. Перепад высот на карте 300-500 метров. Набор высоты на трассе мастеров 600-800 метров. Крутизна склонов средняя около 15-20°. Много крутых склонов от 30° до 45°.

С аналогичными типами рельефа я встречался в г. Железноводске Ставропольского края, в г. Алуште Республики Крым, в г. Сочи Краснодарского края и, конечно же, в Пензенской области.



а) б)

Рисунок 1 – а) вид с горы Бештау Ставропольского края, б) горы Республики Крым.

Люди, приспосабливаясь к рельефу, находят или создают себе более удобные пологие пути. Так, тропы в горах прокладываются с уклоном 8-15, реже — до 20°. В том числе и тропы в форме серпантинов.

Итог: наш диапазон крутизны склонов будет от 0 до 45°.

Вперед и вверх – всегда ли так?

Известна заповедь ориентирования – «Поднимайся круто – спускайся полого». Посмотрим на это выражение с точки зрения теории.

Итак, на рисунке 2 – схема горизонтального отрога в виде треугольной призмы, лежащей на боку. Бок будет основанием отрога, $2L$ - его ширина.

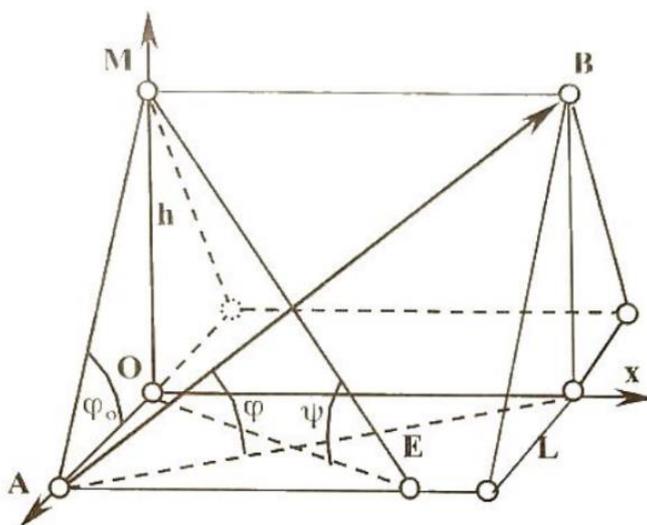


Рисунок 2 - Схема горизонтального отрога в виде треугольной призмы

Мы - у подножья, в точке А. Задача — подняться наверх как можно быстрее. В любую точку и любым путем, по нашему выбору. (Для расчета экспериментальным путем примем пунктом назначения точку М, где $S = AM = 100\text{м.}$)

Пусть угол φ_0 — крутизна склона, $h = L * \text{tg}\varphi_0$ — высота отрога.

Время подъема $T = S/V$.

Путь $S = \sqrt{L^2 + h^2 + x^2}$

Скорость по квадратичной модели $V = 6,5 + 56 * \sin^2\varphi_0$,

где 6,5 мин/км – средняя скорость преодоления 1 км на плоскости, а 56 – коэффициент скорости подъема в гору крутизной φ_0 (для взрослого спортсмена). Необходимо знать, что эти значения индивидуальны для каждого спортсмена.

$\sin\varphi_0 = h/S$. Далее берем производную от времени подъема по x , приравняем ее к нулю, решаем получившееся уравнение и находим не одну, а три интересные точки:

$$X_0 = 0 \text{ и } X_{1,2} = \pm L * \sqrt{7,6 * \text{tg}^2\varphi_0 - 1},$$

где 7,6 – коэффициент времени подъема по x .

Полуширину отрога примем равной единице, то есть $L=1$ км. На другие размеры отрога время подъема будет меняться пропорционально.

Самый крутой подъем — прямой, лобовой, «вперед и вверх». А чем дальше будет располагаться точка В от точки вертикального подъема М в сторону, тем подъем будет положе, скорость больше. Но при этом увеличивается путь.

Построим график затрат времени на подъем по склону крутизной 40° в зависимости от положения точки В на гребне (рисунок 3).

Это — верхняя симметричная кривая с ветвями, идущими вверх, и с выпуклой вершиной в середине. Вершине соответствует точка $X = 0$, Это — местный максимум. А два симметрично расположенных минимума принадлежат точкам $X_{1,2} = \pm 2L$. Отстоят они довольно далеко от середины, и угол подъема $\varphi = 20^\circ$, а не 40° , как крутизна склона.

При уменьшении крутизны склона затраты времени на подъем, естественно, снижаются. Максимум в середине сглаживается. Точки минимумов все ближе и ближе сходятся к середине. Когда крутизна склона сойдет до 20° , все три точки сольются в одну, $X = 0$, и это будет минимум, теперь уже единственный.

Значит, подниматься на гребень прямо, «вперед и вверх», надо только по тем склонам, которые положе 20° .

На всех тех склонах, которые круче 20° , оптимальным, для набора высоты, является угол 20° . Другие углы подъема, как больше, так и меньше этого, проигрышные. Значит, на крутых склонах надо идти не «вперед и вверх», а наискось, набирая высоту не сразу, а постепенно.

Вообще, если скорость подъема задается выражением –

$$V = V_0 + a * \sin^2\varphi_0,$$

то оптимальный угол подъема находится по формуле:

$$\text{tg}\varphi = 1/\sqrt{a/V_0 - 1}$$

Соответствующие точки выхода на гребень:

$$X_{1,2} = \pm L * \sqrt{\left(\frac{a}{V_0} - 1\right) * (\text{tg}^2\varphi_0 - 1)}.$$

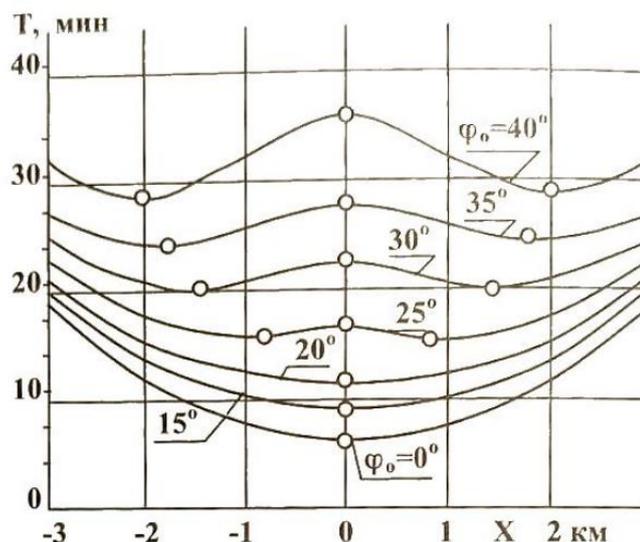


Рисунок 3 - График затрат времени на подъем по склонам различной крутизны

Поскольку у каждого спортсмена скоростные коэффициенты a и V_0 свои, то и выгодный угол подъема будет несколько отличаться от 20° .

На какой выигрыш по времени можно рассчитывать, поднимаясь на отрог по теории? На 40° склонах — на 17%, по 0,43 секунды на каждый метр высоты. На склонах в 30° — меньше, на 7%, по 0,15 сек на метр и т.д. Значит, чем круче склон, тем важнее правильный выбор направления подъема.

Как быстро «отмерить» 20° на местности? На угле 20° до склона на уровне глаз должно быть 5 метров. Это при росте 170 см. Если взор упирается в склон ближе 5 метров — надо повести глазами вправо или влево.

И вообще любой угол в диапазоне от 0 до $30-35^\circ$ можно отложить «по правилу ста»: число метров до склона на уровне глаз, умноженное на число градусов, равно 100.

На трассе соревнований знать крутизну склона, вздымающегося перед нами, вовсе не обязательно. Отмерили по росту до склона на глаз 5 метров или сколько надо - и вперед!

Однако траверсировать склон — значит, иметь «неудобства сбоку»: на крутом склоне ноги «вывертываются» из ботинок, а можно и сорваться, заскользить вниз. Как этого избежать?

Прежде всего, следует оценить трудности. Помеха сбоку — это угол наклона ската поперек линии нашего движения. На рисунке 1 это угол ψ . При лобовом подъеме этот угол нулевой, помех сбоку нет, все трудности впереди. А когда мы бежим по горизонтали — все градусы склона у нас сбоку, помехи наибольшие.

Три угла — крутизна склона φ_0 , угол подъема φ и угол помех ψ — связаны между собой соотношением: $\sin^2\varphi_0 = \sin^2\varphi + \sin^2\psi$. Из этого выражения можно узнать, что нас ждет на том или ином склоне.

Выясняется, что на склонах не круче 35° угол помех меньше 30° . Это надо учитывать. Ведь подобные склоны распространены довольно широко, и бегать по ним придется по-всякому — и прямо вверх или вниз, и по горизонтали, и наискось. Нередко и контрольные пункты ставят так, чтобы участники проявили свой класс в ориентировании на рельефе.

«Зигзаг удачи» — основное правило крутого подъема

Эти слова будут употребляться в прямом смысле, а не в переносном.

На рисунке 4 - варианты выхода на гребень 40-градусного склона. Линия AD — это правый оптимальный путь.

На ней возьмем произвольную точку C, в которой повернем круто налево, с тем чтобы пойти затем параллельно левому оптимальному направлению, на рисунке — часть его AF. Выйдем на гребень в точке В.

Очевидно, что затраты времени на движение углом ACB не больше и не меньше, чем на прямом пути AD, а равны им в точности. Это следует из равенства путей и углов подъема, а значит, и скоростей.

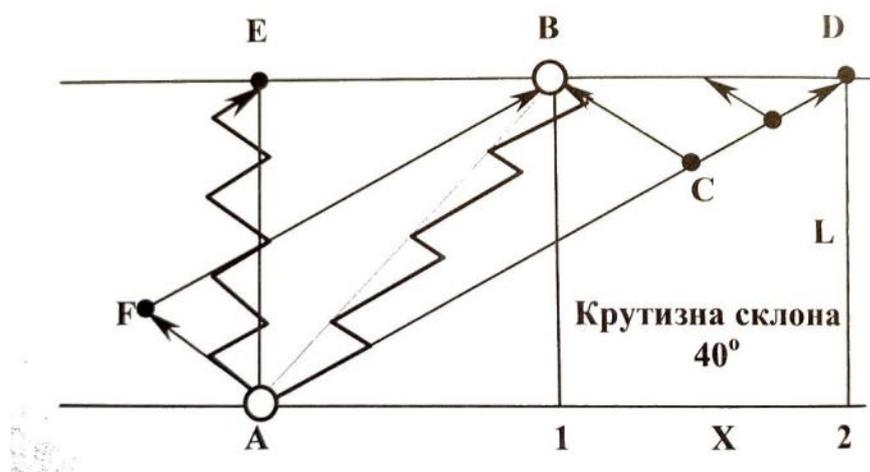


Рисунок 4 - Варианты выхода на гребень 40-градусного склона

Таким же образом — углом — можно попасть и в любую точку гребня между левой и правой оптимальной точками выхода. Как с правого граничного пути, так и с левого. Например, в точку В ведет и левый ход углом AFB. А можно идти не углом, а зигзагом, звенья которого поочередно параллельны то правой, то левой граничной линии. Да и ход углом — уже зигзаг, двухзвенный, самый простой в исполнении. На рисунке два зигзага восьмизвенных, выводящих на гребень.

Ясно, что если точка В на гребне не произвольна, а задана, то в нее ведут не любые маршруты, а только те, которые не выходят за пределы параллелограмма AFBC. Лучи BF и BC параллельны границам зигзаг-сектора.

Если на гребне в пределах отрезка ED (и такого же отрезка влево) будет поставлен контрольный пункт, то можно считать, что задачу выхода на него за кратчайшее время мы решили. Оптимальный путь не прямой, а зигзагом.

А если контрольный пункт будет поставлен ниже гребня, но в секторе оптимальных зигзагов? Проводим через точку контрольный пункт горизонталь. Ясно, что в любую ее точку тоже можно пройти зигзагом, в том числе и в заданную, за одно и то же кратчайшее время. Оно, конечно, будет меньше, чем для точек гребня, пропорционально высоте подъема.

Сектор зигзагов — это сектор самых быстрых наборов высоты. По нему надо двигаться, если по условиям задачи от набора большой высоты никуда не уйти. Но высоту набирать надо не как-нибудь, а под углом около 20° . Уже говорилось, что этот угол немного отличается и зависит от физических параметров спортсмена.

Вывод: если, двигаясь по крутому косоугору зигзагами, можно достичь любой его точки за кратчайшее время, то имеет ли значение, какой крутизны склон перед нами? Ясное дело, не имеет. Подниматься зигзагом выгодно на любом крутом склоне. Звенья зигзага при необходимости можно сделать и короче, сообразно удобствам пути.

Если крутизна склона на подъеме убывает, то зигзаг будет распрямляться. Он исчезнет при уклоне меньше 20°. Если уклон будет расти, то зигзаг будет сжиматься, углы его будут острее.

Реализация расчетов на практике.

Мною были выбраны 2 склона – пологий и крутой. Определено, что пологий склон составил 15°, а крутой - 36°. За основу для расчета берем участок АВ=100м.

Для получения результатов были приглашены еще 2 спортсмена – Алексей и Артем.

Далее необходимо измерить время, затраченное на преодоление расстояния в 100 м по вариантам, представленным в Таблицах 1, 2 и 3. (результаты занесены в таблицы)

Таблица №1. Результаты затраченного времени на преодоление участка АВ на равнине.

И.Ф. спортсмена	Вариант преодоления (по горизонтали), Т, с
Андрей К.	17
Алексей П.	19
Артем Д.	16

Таблица №2. Результаты затраченного времени на преодоление участка АВ на склоне в 15°.

И.Ф. спортсмена	Вариант преодоления (напрямую), Т, с	Вариант преодоления (зигзаг с амплитудой 2м от АВ), Т, с	Вариант преодоления (зигзаг с амплитудой 10м от АВ), Т, с
Андрей К.	17	22	22
Алексей П.	19	24	24
Артем Д.	16	23	23

Таблица №3. Результаты затраченного времени на преодоление участка АВ на склоне в 36°.

И.Ф. спортсмена	Вариант преодоления (напрямую), Т, с	Вариант преодоления (зигзаг с амплитудой 2м от А1В1), Т, с	Вариант преодоления (зигзаг с амплитудой 10м от А1В1), Т, с
Андрей К.	39	27	27
Алексей П.	48	31	31
Артем Д.	44	29	29

Как говорилось ранее: у каждого спортсмена скоростные коэффициенты a и V_{0-i} свои, значит, и выгодный угол подъема будет несколько отличаться от 20°.

Коэффициент a находится из формулы: $V_{0-i} = a \cdot \sin^2 \varphi$,

$$a = V_{0-i} / \sin^2 \varphi.$$

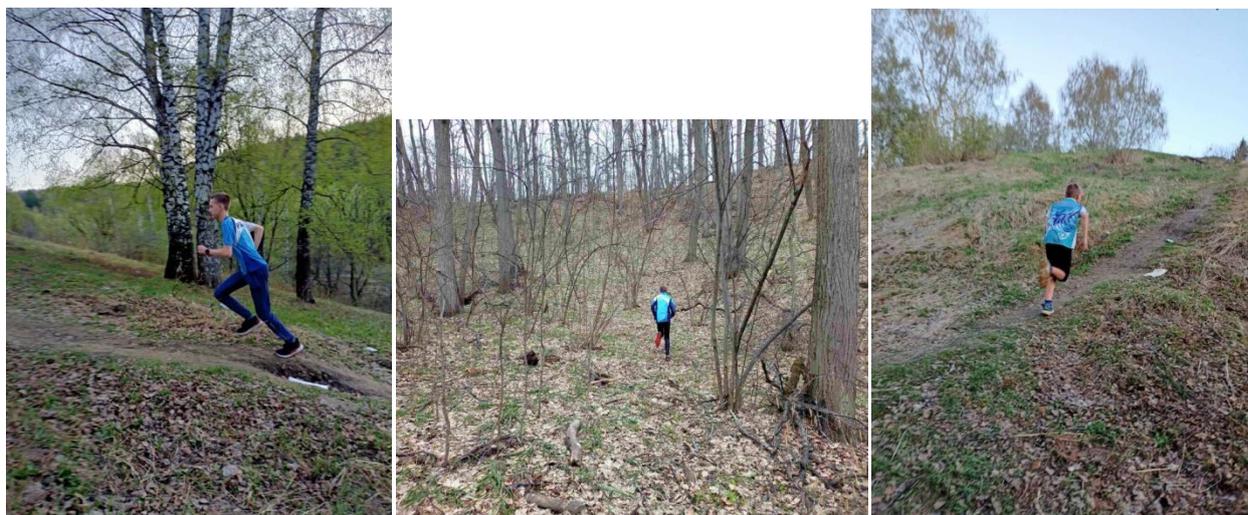


Рисунок 5 - Реализация расчетов на практике на разных склонах

Соответствие значений коэффициентов a и V_0 каждому спортсмену

V_{0-1} Андрей	V_{0-2} Алексей	V_{0-3} Артем	$\varphi, ^\circ$	$\sin\varphi$	$\sin^2\varphi$	a Андрей	a Алексей	a Артем
4,5	6,5	5,5	1	0,017	0,000289	15570,93	22491,3495	19031,142
4,5	6,5	5,5	5	0,087	0,007569	594,5303	858,766019	726,64817
4,5	6,5	5,5	10	0,174	0,030276	148,6326	214,691505	181,66204
4,5	6,5	5,5	12	0,208	0,043264	104,0126	150,240385	127,12648
4,5	6,5	5,5	13	0,225	0,050625	88,88889	128,395062	108,64198
4,5	6,5	5,5	14	0,242	0,058564	76,83901	110,989686	93,91435
4,5	6,5	5,5	15	0,259	0,067081	67,08308	96,8977803	81,990429
4,6	6,5	5,5	16	0,276	0,076176	60,38647	85,3287125	72,201218
4,7	6,5	5,5	17	0,292	0,085264	55,12291	76,233815	64,505536
4,8	6,5	5,6	18	0,309	0,095481	50,27178	68,0763712	58,650412
4,9	6,6	5,7	20	0,342	0,116964	41,89323	56,4276188	48,732943
5	6,8	5,8	22	0,374907	0,1405553	35,5732	48,3795488	41,264909
5,3	7,1	6,2	24	0,406707	0,1654106	32,04148	42,9234928	37,482487
5,7	7,3	6,5	26	0,438371	0,1921691	29,66137	37,9873701	33,824371
6,1	7,6	6,9	28	0,469472	0,220404	27,67645	34,4821393	31,306153
6,5	7,9	7,2	30	0,5	0,25	26	31,6	28,8
6,8	8,2	7,5	35	0,575	0,330625	20,56711	24,8015123	22,68431
6,8	8,2	7,5	36	0,587785	0,3454912	19,68212	23,7343233	21,708223

Для взрослого человека коэффициент $a = 56 \pm 2$, а для спортсменов в возрасте 12-17 лет, коэффициент $a = 66 \pm 2$.

Для каждого спортсмена V_0 определяется только опытным путем. Это усредненное значение 5ти измерений темпа на участке в километр на равнине.

Таблица №4. Коэффициент a , темп V_0 и идеальный угол подъема для каждого спортсмена

И.Ф. спортсмена	Коэффициент a	Темп на равнине V_0 , мин/км	$\varphi, ^\circ$
Андрей К.	67,1	4,5	15
Алексей П.	68,1	6,5	18
Артем Д.	64,5	5,5	17

Исходя из приведенных экспериментальных данных, делаю вывод, что теоретические расчеты оказались верны – на склонах до 20° необходимо бежать прямо, а на склонах более 20° – бежать зигзагом.

Зигзагом в 2м и 10м по времени бежать одинаково, но расстояние увеличивается, при этом - бежать легче.

ВЫВОДЫ

Итак, рассчитав для себя идеальный угол подъема в теории, подтвердив его экспериментальными исследованиями, мне осталось реализовать эти знания в соревновательных условиях. Так, на прошедшем Первенстве России в Рязани, применив новые полученные знания, я улучшил свои результаты и стал победителем в дисциплине «Радиоориентирование».

Достоинствами исследования являются его наглядность, логичность, четкая взаимосвязь между теорией и практикой. В результате проведенной исследовательской работы сделаны выводы о том, что с применением знаний математики можно добиться высоких спортивных результатов.

Современный спорт невозможно представить без науки.



Рисунок 6 – Мои результаты на Первенстве России в Рязани

Список использованной литературы

1. В.П. Бурцев, «Загадки и находки на тропинках спортивного ориентирования», Изд. : «Федеральный центр детско-юношеского туризма и краеведения», г. Москва, 2007.
2. А.В. Абрамов, «Техника и тактика спортивной радиопеленгации», учебно-метадическое пособие, Изд. – полиграфический комплекс: «ФГАОУ ВО «Северо-Кавказский федеральный университет»», г. Ставрополь, 2020.
3. В. М. Алешин, «Спортивная картография», г. Воронеж, 2007
4. В. М. Алешин, «Дистанции в спортивном ориентировании бегом», г. Воронеж, 2008
5. https://ru.onlinemschool.com/math/formula/bradis_table/

Рецензия на работу
ученика 10 класса МБОУ «Лицей №55» г. Пензы

Костенкова Андрея

«Вперед и вверх – всегда ли так?»

Исследовательская работа выполнена на актуальную тему, поскольку многие спортсмены преодолевают дистанцию кратчайшим путем, а не быстрее. Современный спорт невозможно представить без науки.

Автор поставил себе задачу рассчитать наиболее эффективный метод преодоления рельефа местности на дистанциях спортивного ориентирования.

Материал изложен грамотно и логично, структура полностью соответствует требованиям. Хорошее полное заключение обобщает сказанное выше и подводит логический итог рассмотренному материалу.

В результате проведенной исследовательской работы сделаны выводы о том, что с применением знаний математики можно легко добиться высоких спортивных результатов. Полученные в ходе исследования данные расширили представления о сферах применения математики.

Во время выполнения работы Костенков Андрей проявил высокую степень самостоятельности. Исследовательская работа имеет хороший эстетический вид, полностью соответствует задуманной идее, включает личный опыт учащегося.

Достоинствами исследования являются его наглядность, логичность, четкая взаимосвязь между частями, конкретность и детальная разработанность предложенного материала.

Считаю, что исследовательская работа «Вперед и вверх – всегда ли так?» достойна для представления на научно-практической конференции.

Рецензент:

председатель МО учителей математики



Росеева Е.В.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Согласование участия в открытом региональном конкурсе исследовательских и проектных работ школьников «Высший пилотаж - Пенза» 2023.

В оргкомитет конкурса исследовательских и проектных работ школьников «Высший пилотаж - Пенза» 2023

Для участия в открытом региональном конкурсе исследовательских и проектных работ школьников «Высший пилотаж - Пенза» 2023 от образовательной организации

МБОУ лицей №55 г. Пензы

направляется работа на тему:

"Вперед и вверх - всегда ли так?"

секция Математика

Автор(авторы) работы:

Костенков Андрей Сергеевич

Научное руководство:

Поссева Елена Витальевна

Директор ОО



Е.А Крашенин

М. П.