Открытый региональный конкурс исследовательских и проектных работ школьников «Высший пилотаж - Пенза» 2021

Секция: Математика

Обобщение некоторых задач, сводящихся к раскраске графов

Автор работы:
ученица 11 класса
МБОУ СОШ № 18 г. Пензы
Айсина Алина Кимовна

Место выполнения работы:
МБОУ СОШ № 18 г. Пензы

Научный руководитель:
Жистина Л.Ф.

г. Пенза, 2020

Оглавление

Введение

В настоящее время теория графов активно развивается. Методы теории графов широко применяются в разделах дискретной математики. Они крайне важны при анализе и синтезе различных дискретных преобразователей: функциональных блоков компьютеров, комплексов программ и т.д. .

Первой работой теории графов как математической дисциплины считают статью Леонарда Эйлера (1736 г.), в которой рассматривалась задача о Кёнигсбергских мостах.

Дальнейшее развитие теория графов получила спустя почти 100 лет с развитием исследований по электрическим сетям, кристаллографии, органической химии и другим наукам. Графы служат удобным средством описания связей между объектами. Например, графом является схема линий метрополитена. Точками на ней представлены станции, а линиями – пути движения поездов.

Позднее появились работы, связанные с раскраской графа. Как наиболее яркий пример результатов в данной области стоит отметить проблему четырех красок (Френсис Гутри, 1852 г.). Раскраска графов на данный момент является одной из самых популярных и интенсивно изучаемых тем в теории графов. Данная работа посвящена практическим задачам, которые решаются с помощью раскраски графов. Рассмотрены задачи на составление расписаний, о размещении грузов, задача о составлении рейсов машин с вывозом товаров и другие. Большое практическое значение определяет актуальность анной темы и исходя из этого следует цель работы:

Цель данного исследования: постановка и решение обобщённых вариантов прикладных задач, с помощью раскраски графов.

Исходя из поставленной цели, нами были определены следующие **задачи:**

- Рассмотреть типы прикладных задач, их постановку в терминах теории графов.
- Сформулировать некоторые обобщения задачи о составлении расписания рейсов машин с вывозом товаров.
- Найти решение сформулированных задач с помощью раскраски графов.

Объектом исследования является раскраска графов.

Предметом исследования является задача о составлении расписания рейсов машин с вывозом товаров и ее обобщения, решаемые с помощью раскраски графов.

Глава 1. Вершинная раскраска графа

В данной главе будет рассмотрена задача вершинной раскраски обыкновенного графа. Перед тем как приступать к рассмотрению задач напомним определение графа, которое будет использовано далее, без углубления в теорию графов. Под «графом» в данной работе будет пониматься обыкновенный неориентированный граф. Стоит заметить, что большинство определений теории графов даются по-разному в различных источниках, но они просто демонстрируют разные подходы и в большинстве своём не противоречат друг другу.

Граф - упорядоченная пара множеств (V, E), где V- непустое множество вершин, а E-множество неупорядоченных пар вида (V_i, Vj), называемых рёбрами, где V_i и Vj принадлежат множеству V.

Вершины Vi и Vj графа $G = (V,$ E) называются *смежными,* если они соединены ребром, то есть если в E существует ребро (Vi, Vj).

Теперь рассмотрим подробнее задачу раскраски графа. Данная задача является одной из основных в теории графов, потому что входит в класс NP-полных и к ней сводятся многие другие задачи этой области. Раскраска графа может быть вершинной, рёберной и тотальной, однако все три варианта задачи можно свести друг к другу, поэтому рассмотрим только вершинную раскраску графа.

рис.1.1.

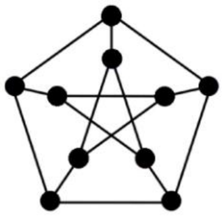
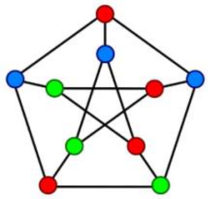


рис. 1.2.



Задача же раскраски состоит в нахождении минимального количества цветов для раскраски графа. Такое решение далее будем называть *оптимальным.* На рис. 1.2 показана оптимальная раскраска графа, приведённого на рис. 1.1. Задача не имеет известного единого алгоритма для поиска решения за полиномиальное время. Существуют варианты таких решений только для определённых типов графов. Единственным подходом к нахождению оптимального решения является перебор вариантов. Однако предлагаются разные подходы и алгоритмы для поиска неточного, приближённого решения, которое найти гораздо проще оптимального. Приведем кратко принцип работы некоторых из них.

- *Алгоритмы последовательного перебора.* Такие алгоритмы последовательно отделяют группы цветов. На каждом этапе создаётся группа вершин, в которую пытаются включить нераспределённые вершины, пока все они не будут распределены по цветам.
- *Жадные алгоритмы.* Жадные алгоритмы упорядочивают вершины по какому-либо правилу (чаще всего встречаются примеры, где используют степени вершин) и последовательно присваивают им цвета, в которые не были окрашены смежные с ними вершины.

Алгоритм с использованием битовых операций. Алгоритм похож на первый, но работает с матрицами, используя битовые операции. Такой подход позволяет сократить время работы в несколько раз.

Глава 2. Прикладные задачи, приводящие к раскраске графов

2.1. Типы прикладных задач

В этой главе приводятся несколько типов задач, решаемых с помощью раскраски графов.

Задача о составлении расписания. Предположим, что нужно прочитать несколько лекций за кратчайшее время. Чтение каждой лекции в отдельности занимается один час, но некоторые из лекций не могут читаться одновременно (например, их читает один преподаватель или требуется одна и та же аудитория). Требуется составить расписание так, чтобы чтение всех лекций заняло минимально возможное время (в качестве «единицы времени» считается одна пара).

Задача распределения оборудования. Заданы множества $V=\{v_1,v_2,...,v_n\}$ и $S=\{s_1,s_2,...,s_m\}$ работ и механизмов соответственно. Для выполнения каждой из работ требуется некоторое время, одинаковое для всех работ, и некоторые механизмы. При этом никакой из механизмов не может быть одновременно занят в нескольких работах. Нужно распределить механизмы так, чтобы общее время выполнения всех работ было минимальным.

Задача о проектировании коробки скоростей. Коробка скоростей - механизм для изменения частоты вращения ведомого вала при постоянной частоте вращения ведущего. Имеется n шестерен, которые размещаются на $к$ валах. Задача, стоящая перед конструктором коробки, заключается в минимизации ее размеров, а это часто сводится к поиску наименьшего числа валов $к$, на которых размещаются n шестерен.

Задача о размещении грузов. Имеется n грузов, которые нужно разместить в контейнеры для перевозки, причем некоторые грузы нельзя помещать в один контейнер. Какое наименьшее количество контейнеров потребуется для перевозки всех грузов, и как нужно разместить грузы в этих контейнерах?

Задача об авиарейсах. Имеем $к$ самолетов, и мы должны назначить им n рейсов, где i-й рейс проходит во временном интервале (a_i,b_i). Очевидно, что если два рейса перекрываются, то мы не можем назначить тот же самый самолёт для обоих перелетов. Требуется составить авиарейсы так, чтобы ни один самолет не был задействован в двух перелетов одновременно.

Задача о составлении рейса машин с вывозом товара. Машина с вывозом товаров может за один день объехать ряд мест. Рейсом такой машины является последовательность пунктов, которые она посетит за данный день, при условии, что рейс должен быть закончен в течении одного рабочего дня. Мы хотим найти множество рейсов со следующими свойствами:

- ✓ каждый пункт посещается за неделю определенное число раз;
- ✓ рейсы можно распределить среди шести дней недели (воскресение - нерабочий день) таким образом, чтобы ни один пункт не посещался дважды за один день; ни в один день число рейсов не превосходило число машин с вывозом товаров.
- ✓ общее время работы всех машин за неделю минимально.

Задача о спортивных турнирах по круговой системе. В соревновании задействованы n команд, где каждая команда должна играть ровно m раз в течение фиксированного количества раундов. Обычно количество команд n является четным. В случаях, когда n нечетно, может быть введена дополнительная «фиктивная команда», и команда, назначенная для игры с фиктивной командой, встречается с ней в соответствии с расписанием игр. Расписание турнир по круговой системе считается допустимым, если каждая команда в расписании конкурирует не чаще одного раза за раунд. Требуется составить расписание игр так, чтобы каждая команда провела заданное число игр с другими командами в течение фиксированного количества раундов.

Задача о коллективном поведении живых организмов. Путь одного муравья, пчелы, термита и осы часто слишком прост, но их коллективное и социальное поведение имеет большое значение. Коллективное и социальное поведение живых существ показывает, что продвинутые млекопитающие также пользуются социальной жизнью. Дано n представителей (муравьи, пчелы, термиты, осы и т.д.), которые нужно распределить на классы живых организмов, обладающими общими свойствами. На какое наименьшее количество классов млекопитающих потребуется распределить этих представителей?

Задача о частотных диапазонах в станциях сотовой сети. Имеется n базовых станций (вышек сотовой связи), которые расположены так, что у них есть общие зоны покрытия. Так как число диапазонов частот, которые используются в системе мобильной радиосвязи ограниченно, то могут возникать взаимные помехи из-за того, что различные базовые станции (например, с общей зоной покрытия) используют одинаковый диапазон частот. Требуется распределить частоты между базовыми станциями таким образом, чтобы минимизировать помехи, оказываемые станциями друг на друга.

Рассмотренные выше задачи могут быть сведены к построению и раскраске некоторого графа, в котором учитываются связи между объектами: наличие какого-либо общего свойства или конкуренции. Такой граф принято называть графом конфликтов (Conflict Graph) . Его раскраска позволяет найти разбиение всех объектов на независимые множества, в каждом из которых элементы не являются конкурирующими объектами. Рассмотрим постановки этих задач в терминах теории графов, а решение задач сведем к нахождению хроматического числа и минимальной раскраски графа конфликтов.

Глава 2. Обобщение задач, сводящихся к раскраске графов

2.1. Постановка задач, сводящихся к раскраске графов

В этом параграфе мы сформулируем несколько вариантов обобщения задачи о составлении расписания рейсов машин с вывозом товаров. В качестве исходной задачи мы рассматриваем задачу, которая формулируется следующим образом:

Машина с вывозом товаров может за один день объехать ряд мест. Рейсом такой машины является последовательность пунктов, которые она посетит за данный день, при условии, что рейс должен быть закончен в течении одного рабочего дня. Мы хотим найти множество рейсов со следующими свойствами:

- каждый пункт посещается за неделю определенное число раз;
- рейсы можно распределить среди шести дней недели (воскресение - нерабочий день) таким образом, чтобы ни один пункт не посещался дважды за один день; и в один день число рейсов не превосходило число машин с вывозом товаров.
- общее время работы всех машин за неделю минимально.

Сформулируем 1 вариант обобщения задачи о составлении расписания рейсов машин с вывозом товаров.

Задача 1. Заданы множество пунктов $S = \{s_1; s_2,..., s_k\}$ - склады, пункты самовывоза товара и др. и множество рейсов $R = \{r_1, r_2, ..., r_n\}$, каждый из которых включает в себя несколько различных пунктов. Рейсом машины является последовательность пунктов $r_i=\{s_{i1};s_{i2},...,s_{ik}\}$, $1\leq i \leq n$, $m_i \leq \kappa$, которые она посетит за данный день, при условии, что рейс должен быть закончен за время , где

$$t_i = \begin{cases} a, 1 \leq i \leq n_1 \\ b, n < i \leq n_2, a > b > c \\ c, \quad n_2 \leq i \leq n \end{cases}$$

Требуется найти расписание (распределение рейсов по дням недели) со следующими свойствами:

- каждый пункт посещается за неделю хотя бы один раз;
- рейсы нужно распределить среди нескольких дней недели таким образом, чтобы ни

один пункт не посещался дважды за один день;

- общее время работы всех машин за неделю минимально, $\boldsymbol{T = min_{P(G)} \sum_k T_k}$, где минимум вычисляется на P(G) - множестве всевозможных раскрасок графа $\boldsymbol{G}$.

$\boldsymbol{T_к}$ - максимальное время в ***к-й*** день, $\boldsymbol{T_к max(t_{kl}, t_{k2}, \ldots, t_{ks})}$, где s - это количество рейсов в ***к-й*** день.

<u>Постановка задачи в терминах теории графов</u>**.** Построим граф G, в котором вершины соответствуют рейсам. Две вершины этого графа смежны тогда и только тогда, когда два различных рейса содержат один и тот же пункт. Любая правильная раскраска графа $\boldsymbol{G}$ дает распределение рейсов на несколько дней недели (по числу цветов, и требуется, чтобы их было не более шести) таким образом, чтобы каждый пункт посещался хотя бы раз в неделю, но ни один пункт не посещался дважды за один день. И, наоборот, множество рейсов, которые можно распределить на несколько дней недели таким образом, чтобы каждый пункт посещался хотя бы раз в неделю, но ни один пункт не посещался дважды за один день (каждый цвет соответствует определенному дню), определяет правильную раскраску $\boldsymbol{G}$. Тогда данная совокупность рейсов может быть распределена между несколькими днями недели, чтобы выполнялись свойства рейсов, тогда и только тогда, когда вершины можно разбить на не более шесть классов, где каждому классу соответствует i-й цвет. Требуется так раскрасить вершины, чтобы никакие две вершины одного цвета не соединялись ребром.

Чтобы решить задачу, нужно из всех возможных раскрасок графа G выбрать ту, для которой $\boldsymbol{T}$ будет наименьшим.

Непосредственное решение задачи перебором всех раскрасок является очень сложным. Поэтому важно знать границы изменения наименьшего времени $\boldsymbol{T}$, т.е. его верхнюю и нижнюю оценку. В следующем утверждении мы указываем двустороннюю оценку наименьшего времени $\boldsymbol{T}$ с помощью хроматического числа графа конфликтов.

<u>**Утверждение.**</u> Дано множество $\boldsymbol{R = \{r_1, r_2, \ldots, r_n\}}$ - рейсы. Рассмотрим задачу, в которой для рейсов $\boldsymbol{r_1, r_2, \ldots, r_к}$ требуется время $\boldsymbol{a}$, для рейсов $\boldsymbol{r_{k+1}, \ldots, r_m}$ требуется время $\boldsymbol{b}$ и для рейсов $\boldsymbol{r_{m+1}, \ldots,}$ r_n требуется время $\boldsymbol{c}$, причем $\boldsymbol{a > b > c}$. Тогда общее время работы всех машин за неделю будет удовлетворять двусторонней оценке:

$\boldsymbol{a + (x-1)\cdot c \le Tmin < T(P(G)) < x\cdot a}$, где $\boldsymbol{P(G)}$ - любая раскраска графа G.

Доказательство: Построим граф G. Найдём хроматическое число $\boldsymbol{x = x(G)}$. Потому как $\boldsymbol{T_{min} = T_1 + T_2 + \ldots + T_к}$ - сумма времени по дням. А дней столько же сколько и хроматическое число, $\boldsymbol{к = x}$. Сравним слагаемые в суммах.

$\boldsymbol{T_1 + T_2 + \ldots + T_x}$ и $\boldsymbol{a + \underbrace{c + c \ldots + c}_{x-1}}$. Причем по условию существует $\boldsymbol{T_t = a}$, т.к. есть рейсы со временем $\boldsymbol{a}$. Предположим, что это $\boldsymbol{T_1 = a}$. Сравним остальные значения по дням со значением $\boldsymbol{c}$. Очевидно $\boldsymbol{T_t > c}$, потому что $\boldsymbol{max(a, b, c) > c}$. Следовательно слагаемые $\boldsymbol{T_2} + \ldots + \boldsymbol{T_X}$ не меньше $\boldsymbol{c}$ и значит их сумма не меньше суммы $\boldsymbol{\underbrace{c + c \ldots + c}_{x-1}}$

Тогда общее время будет удовлетворять неравенств$\boldsymbol{a + (x-1^{)}\cdot c < T_{min}}$.

Нижняя оценка неравенства доказана. Докажем верхнюю.

$\boldsymbol{T_{min} = T_1 + T_2 + \ldots + T_k}$ - сумма времени по дням. Тогда каждое слагаемое в этой сумме либо Ti = $\boldsymbol{a}$, либо Ti < $\boldsymbol{a}$. Значит сумма этих слагаемых $m_г + m_2 + - + m_к$ может принимать самое большое значение когда все $\boldsymbol{Ti = a}$ и больше чем $\boldsymbol{x\cdot a}$ быть не может. Следовательно, $\boldsymbol{T_{min} \le x\cdot a}$. Верхняя оценка неравенства доказана.

Сформулируем 2 вариант обобщения задачи о составлении расписания рейсов машин с вывозом товаров.

Задача 2 являться обобщением задачи 1. В ней учитываются количество использованных в каждый день машин.

Задача 2. Заданы множество пунктов $S = \{s_1; s_2,..., s_k\}$ - склады, пункты самовывоза товара и др.; l-машины и множество рейсов $R = \{r_1, r_2, ..., r_n\}$, каждый из которых включает в себя несколько различных пунктов. Рейсом машины является последовательность пунктов $r_i = \{s_{i1}; s_{i2},..., s_{iq_i}\}$, $1 \le i \le n$, $q_i \le \kappa$, которые она посетит за данный день, при условии, что рейс должен быть закончен за время t_i, где

$$t_i = \begin{cases} a, 1 \le i \le n_1 \\ b, n_1 < i \le n_2, a > b > c \\ c, \quad n_2 \le i \le n \end{cases}$$

Требуется найти расписание (распределение рейсов по дням недели) со следующими свойствами:

- каждый пункт посещается за неделю хотя бы один раз;
- рейсы нужно распределить среди нескольких дней недели таким образом, чтобы ни в один день число рейсов не превосходило число машин;
- общее время работы всех машин за неделю минимально, $T = min_{P(G)} \sum_k T_k$, где минимум вычисляется на P(G) - множестве всевозможных раскрасок графа G.

T_κ - максимальное время в κ-й день, $T_\kappa = max(t_{kl}, t_{k2}, \ldots, t_{ks})$, где s - это количество рейсов в κ-й день, $s \le l$.

Постановка задачи в терминах теории графов. Построим граф G, в котором вершины соответствуют рейсам. Две вершины этого графа смежны тогда и только тогда, когда два различных рейса содержат один и тот же пункт. Любая правильная раскраска графа G дает распределение рейсов на несколько дней недели (по числу цветов, и требуется, чтобы их было не более шести) таким образом, чтобы каждый пункт посещался хотя бы один раз в неделю, и ни в один день число рейсов не превосходило число машин (т.е. в один цвет должны быть раскрашены не более, чем l вершин $(q_i \le l)$). И, наоборот, множество рейсов, которые можно распределить на несколько дней недели таким образом, чтобы каждый пункт посещался хотя бы один раз в неделю, и ни в один день число рейсов не превосходило число машин (каждый цвет соответствует определенному дню и в один цвет раскрашены не более, чем l вершин $(q_i \le l)$), определяет правильную раскраску G. Тогда данная совокупность рейсов может быть распределена между несколькими днями недели, чтобы выполнялись свойства расписание рейсов, тогда и только тогда, когда вершины можно разбить на не более шесть классов, где каждому классу соответствует i-й цвет. Требуется так раскрасить вершины, чтобы никакие две вершины одного цвета не соединялись ребром и количество раскрашенных вершин в один цвет не превосходило l.

Чтобы решить задачу, нужно из всех возможных раскрасок графа G выбрать ту, для которой T будет наименьшим.

Сформулируем 3 вариант обобщения задачи о составлении расписания рейсов машин с вывозом товаров.

Задача 3 являться обобщением задачи 1 и задачи 2. В ней требуется определить максимальное количество машин в день.

Задача 3. Заданы множество пунктов $S = \{s_1; s_2,..., s_k\}$ - склады, пункты самовывоза товара и др.; l-машины и множество рейсов $R = \{r_1, r_2, ..., r_n\}$, каждый из которых включает в себя несколько различных пунктов. Рейсом машины является последовательность пунктов $r_i = \{s_{i1}; s_{i2},..., s_{im_i}\}$, $1 \le i \le n$, $m_i \le \kappa$, которые она посетит за данный день, при условии, что рейс должен быть закончен за время t_i, где

$$t_i = \begin{cases} a, 1 \le i \le n_1 \\ b, n_1 < i \le n_2, a > b > c \\ c, \quad n_2 \le i \le n \end{cases}$$

Требуется найти расписание (распределение рейсов по дням недели) со следующими свойствами:

- каждый пункт посещается за неделю хотя бы два раза;
- рейсы нужно распределить среди нескольких дней недели таким образом, чтобы ни один пункт не посещался дважды за один день;
- определить максимальное количество машин в день.

Постановка задачи в терминах теории графов. Построим граф $\boldsymbol{G}$**,** в котором вершины соответствуют рейсам. Две вершины этого графа смежны тогда и только тогда, когда два различных рейса содержат один и тот же пункт. Любая правильная раскраска графа $\boldsymbol{G}$ дает распределение рейсов на несколько дней недели (по числу цветов, и требуется, чтобы их было не более шести) таким образом, чтобы каждый пункт посещался хотя бы два раза в неделю, но ни один пункт не посещался дважды за один день. И, наоборот, множество рейсов, которые можно распределить на несколько дней недели таким образом, чтобы каждый пункт посещался хотя бы два раза в неделю, но ни один пункт не посещался дважды за один день (каждый цвет соответствует определенному дню и в один цвет необходимо раскрасить как можно больше вершин), определяет правильную раскраску $\boldsymbol{G}$. Тогда данная совокупность рейсов может быть распределена между несколькими днями недели, чтобы выполнялись свойства расписание рейсов, тогда и только тогда, когда вершины можно разбить на не более шесть классов, где каждому классу соответствует $\boldsymbol{i}$-й цвет. Требуется так раскрасить вершины, чтобы в один цвет было раскрашено максимальное количество вершин и никакие две вершины одного цвета не соединялись ребром.

2.2. Решение задач

В этом параграфе мы формулируем и решаем примеры для обобщенных задач о составлении расписания рейсов машин с вывозом товаров из п. 3.1.

Задача 1. Заданы множества $\boldsymbol{R = \{r_1, r_2, ..., r_{10}\}}$ и $\boldsymbol{S = S = \{s_1; s_2, ..., s_{12}\}}$ рейсы и пункты соответственно. 10 рейсов разбиты на 3 группы:

1 группа. Долгие рейсы - 11 ч.

2 группа. Средние рейсы - 9 ч.

3 группа. Быстрые рейсы - 7 ч.

Необходимо распределить рейсы так, чтобы среди нескольких дней недели ни один пункт не посещался дважды за один день и, хотя бы один раз в неделю.

В таблице 7 отмечены рейсы, которые содержат один и тот же пункт. Требуется определить общее время работы всех машин за неделю, $\boldsymbol{T = min_{P(G)} \sum_k T_k}$**,** где минимум вычисляется на P(G) - множестве всевозможных раскрасок графа $\boldsymbol{G}$**.**

$\boldsymbol{T_к}$ - максимальное время в $\boldsymbol{к}$**-й** день, $\boldsymbol{T_к = max(t_{kl}, t_{k2}, \dots, t_{ks})}$**,** где s - это количество рейсов в $\boldsymbol{к}$**-й** день.

Таблица 7. Расписание рейсов для задачи 1

Рейсы	Пункты												Время, T_k
	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8	s_9	s_{10}	s_{11}	s_{12}	
r_1	+	+	+		+				+	+			11
r_2	+		+	+		+	+			+		+	9
r_3			+		+	+			+		+		7

r_4								+				+	7
r_5		+		+			+				+		7
r_6			+							+		+	9
r_7	+		+				+		+				11
r_8		+			+					+	+		11
r_9		+											9
r_{10}	+						+				+		7

Решение. Построим граф с вершинами $r_1, r_2, \dots, r_{10}$. Соединим ребрами вершины, в соответствии с таблицей 7. Получим граф, изображенный на рисунке 8. Вершины r_1, r_2, r_3, r_5, r_8, r_{10} образуют полный подграф, изоморфный графу K_6, следовательно хроматическое число графа не меньше 6, $x(G) \geq 6$. На рисунке 8 указан один из вариантов раскраски графа в 6 красок.

Рис. 8 Первый вариант раскраски графа

Сопоставляем полученную раскраску с таблицей 7 и составляем первый вариант расписания рейсов (см. таблица 8). В понедельник выполняется рейс r_1, вершина которого раскрашена в желтый цвет и указано максимальное время работы машины за этот день $T_1=11$. Во вторник выполняется один рейс r_2. Соответствующая ему вершина покрашена в синий цвет, а время работы равно $T_2=9$. В среду выполняются рейсы r_3, r_4, r_9, соответствующие им вершины покрашены в красный цвет и время выполнения всех рейсов равно $T_3=9$. В четверг выполняется один рейс r_5, соответствующая ему вершина раскрашена в фиолетовый цвет и время работы равно $T_4=7$. В серый цвет покрашены вершины, соответствующие рейсам r_6, r_{10}, которые выполняются в пятницу за время $T_5=9$. В субботу выполняются рейсы r_7, r_8 (вершины оранжевого цвета) за время $T_6=11$.

Таблица 8. 1 вариант расписание рейсов

Дни недели	Рейсы	Пункты												Время, T_k
Понедельник	r_1	s_1	s_2	s_3		s_5				s_9	s_{10}			11
Вторник	r_2	s_1		s_3	s_4		s_6	s_7			s_{10}		s_{12}	9
Среда	r_3, r_4, r_9		s_2	s_3		s_5	s_6		s_8	s_9		s_{11}	s_{12}	9
Четверг	r_5		s_2		s_4			s_7				s_{11}		7
Пятница	r_6, r_{10}	s_1		s_3				s_7			s_{10}	s_{11}	s_{12}	9
Суббота	r_7, r_8	s_1	s_2	s_3		s_5		s_7		s_9	s_{10}	s_{11}		11

Общее время работы всех машин за неделю: T =11 + 9 + 9 + 7 + 9 + 11 = 56 ч.

Мы построили граф конфликт и раскрасили его. Теперь по раскраске графа можем найти оценку, т.е. минимальное и максимальное время работы всех машин за неделю.

Рассмотрим некоторые способы уточнения оценки

$$a + (x-1)\cdot c \leq T_{min} \leq T(P(G)) \leq x \cdot a$$

Находим общее время работы для всех машин за неделю, которое удовлетворяет двусторонней оценке

$a + (x - 1)\cdot c \leq T_{min} \leq T(P(G))$

$11 + (6 - 1)\cdot 7 \leq T_{min} \leq 6\cdot 11$

Получим $46 \leq T_{min} \leq 66$.

Используя хроматический полином, найдём количество различных раскрасок этого графа. Хроматический полином найдем с помощью программы «Wolfram Mathematica» (см. Приложение 2).

$\boldsymbol{f(G,z)}$ = -15120z + 53604z^2 - 80556z^3 + 67893z^4 - 35561z^5 + 12055z^6 - 2654z^7 + 367z^8 - 29z^9 + z^{10}.

f(G, 0) = f(G, 1) = … = f(G, 5) = 0, ***f(G, 6)*** = 25920 – количество способов раскраски графа G в 6 цветов. С учетом перестановки цветов, получим число различных раскрасок $\frac{f(G,6)}{6!} = 36.$

Получили 36 различных раскрасок. Но построить их все будет трудоемко.

Проверим можно ли уменьшить время работы всех машин за неделю с помощью операции слияния вершин. Вершины r_7 и r_9 несмежны и в данной раскраске относятся к разным цветовым группам. Зададим граф $\boldsymbol{G_1 = G - r_7 - r_9}$. К графу G_1 присоединим новую вершину r_9, соединив ее ребром с каждой из вершин, входящих в объединение окружений вершин r_7 и r_9 в графе G. В результате слияния вершин получили граф, изображенный на рисунке 9.

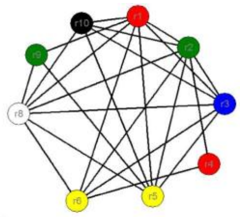


Рис. 9. Граф G_1. Слияние вершин $\boldsymbol{r_7}$ и $\boldsymbol{r_9}$

У нового графа найдём хроматическое число и общее время работы всех машин за неделю (см. таблицу 9). В понедельник выполняются рейсы r_1, r_4, вершины которого раскрашены в красный цвет и указано максимальное время работы машин за этот день T_1=11. Во вторник выполняются рейсы $\boldsymbol{r_2, r_9}$. Соответствующие ему вершины покрашены в зеленый цвет, а время работы равно $\boldsymbol{T_2=9}$. В среду выполняется один рейс $\boldsymbol{r_3}$, соответствующая ему вершина покрашена в синий цвет и время выполнения рейса равно $\boldsymbol{T_3=7}$. В четверг выполняются рейсы $\boldsymbol{r_5, r_6}$, соответствующие им вершины раскрашены в желтый цвет и время работы всех рейсов равно $\boldsymbol{T_4=9}$. В белый цвет покрашена вершина, соответствующая рейсу r_8, которая выполняется в пятницу за время $\boldsymbol{T_5=11}$. В субботу выполняется рейс r_{10}(вершина черного цвета) за время $\boldsymbol{T_6=7}$.

Таблица 9. Расписание рейсов после первого склеивания вершин

Дни недели	Рейсы	Пункты												Время, T_k
Понедельник	$\boldsymbol{r_1,r_4}$	s_1	s_2	s_3		s_5			s_8	s_9	s_{10}		s_{12}	11
Вторник	$\boldsymbol{r_2,r_9}$	s_1	s_2	s_3	s_4		s_6	s_7			s_{10}		s_{12}	9
Среда	$\boldsymbol{r_2}$			s_3		s_5	s_6			s_9		s_{11}		7
Четверг	$\boldsymbol{r_5,r_6}$		s_2	s_3	s_4			s_7			s_{10}	s_{11}	s_{12}	9
Пятница	$\boldsymbol{r_8}$		s_2			s_5					s_{10}	s_{11}		11
Суббота	$\boldsymbol{r_{10}}$	s_1						s_7				s_{11}		7

Общее время работы всех машин за неделю: $\boldsymbol{T}$ = 11 + 9 + 7 + 9 + 11 + 7 = 54 ч.

Хроматическое число этого графа не увеличилось, следовательно, мы можем вершины $\boldsymbol{r_7}$ и $\boldsymbol{r_9}$ раскрасить в один цвет. Следовательно, для графа $\boldsymbol{G_1}$ можно построить раскраску, указанную на рисунке 9. Общее время работы всех машин за неделю не изменилось.

Продолжим использовать операцию слияния вершин для того, чтобы уменьшить время работы всех машин за неделю с помощью графа $\boldsymbol{G_1}$. Вершины $\boldsymbol{r_6}$ ***и*** $\boldsymbol{r_9}$ несмежны и в данной раскраске относятся к разным цветовым группам. Зададим граф $\boldsymbol{G_2 = G_1\text{-}r_6\text{-}r_9}$. К графу $\boldsymbol{G_2}$ присоединим новую вершину r_6, соединив ее ребром с каждой из вершин, входящих в объединение окружений вершин $\boldsymbol{r_6}$ и $\boldsymbol{r_9}$ в графе $\boldsymbol{G_1}$. В результате слияния вершин получили граф, изображенный на рисунке 10.

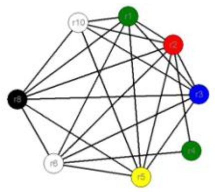


Рис. 10. Граф $\boldsymbol{G_2}$. Слияние вершин $\boldsymbol{r_6}$ ***и*** $\boldsymbol{r_9}$

У нового графа найдём хроматическое число и общее время работы всех машин за неделю (см. таблицу 10). В понедельник выполняются рейсы ту, r_4, вершины которого раскрашены в зеленый цвет и указано максимальное время работы машин за этот день $\boldsymbol{T_1=11}$. Во вторник выполняется один рейс $\boldsymbol{r_2}$. Соответствующая ему вершина покрашена в красный цвет, а время работы равно $\boldsymbol{T_2=9}$. В среду выполняется рейс $\boldsymbol{r_3}$, соответствующая ему вершина покрашена в синий цвет и время выполнения рейса равно $\boldsymbol{T_3=7}$. В четверг выполняется рейс $\boldsymbol{r_5}$, соответствующая ему вершина раскрашена в желтый цвет и время работы равно $\boldsymbol{T_4}=7$. В черный цвет покрашена вершина, соответствующая рейсу r_8, которая выполняется в пятницу за время $\boldsymbol{T_5}=11$. В субботу выполняются рейсы $\boldsymbol{r_6, r_{10}}$ (вершины белого цвета) за время $\boldsymbol{T_6 = 9}$.

Таблица 10. Расписание рейсов после второго склеивания вершин

Дни недели	Рейсы	Пункты												Время, $\boldsymbol{T_k}$
Понедельник	r_1, r_4	s_1	s_2	s_3		s_5			s_8	s_9	s_{10}		s_{12}	11
Вторник	r_2	s_1		s_3	s_4		s_6	s_7			s_{10}		s_{12}	9
Среда	r_3			s_3		s_5	s_6			s_9		s_{11}		7
Четверг	r_5		s_2		s_4			s_7				s_{11}		7
Пятница	r_8		s_2			s_5					s_{10}	s_{11}		11
Суббота	r_6, r_{10}	s_1		s_3				s_7			s_{10}	s_{11}	s_{12}	9

Общее время работы всех машин за неделю: $\boldsymbol{T} = 11 + 9 + 7 + 7 + 11 + 9 = 54$ ч.

С помощью слияния вершин мы проверили невозможность уменьшения времени работы всех машин за неделю. Исходя из рассуждений, можно сделать вывод, что минимальное время работы всех машин за неделю составляет 54 ч.

Рассмотрим второй вариант раскраски графа в 6 красок. Граф указан на рисунке 11.

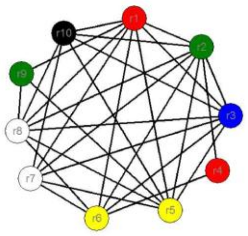


Рис. 11. Второй вариант раскраски графа

Сопоставляем полученную раскраску с таблицей 7 и соответствующее расписание рейсов указано в таблице 11. В понедельник выполняются рейсы $\boldsymbol{r_1}$, $\boldsymbol{r_4}$, вершины которого раскрашены в красный цвет и указано максимальное время работы машин за этот день $\boldsymbol{T_1=11}$. Во вторник выполняются рейсы $\boldsymbol{r_2}, \boldsymbol{r}_9$. Соответствующие им вершины покрашены в зеленый цвет, а время работы всех рейсов равно $\boldsymbol{T_2=9}$. В среду выполняется один рейс $\boldsymbol{r_3}$, соответствующая ему вершина покрашена в синий цвет и время выполнения рейса равно $\boldsymbol{T_3=7}$. В четверг выполняются рейсы $\boldsymbol{r_5}$, $\boldsymbol{r_6}$, соответствующие им вершины раскрашены в желтый цвет и время выполнения работы всех рейсов равно $\boldsymbol{T_4=9}$. В белый цвет покрашены вершины, соответствующие рейсам r_7, r_8, которые выполняются в пятницу за время $\boldsymbol{T_5=11}$. В субботу выполняется один рейс $\boldsymbol{r_{10}}$ (вершина черного цвета) за время $\boldsymbol{T_6 = 7}$.

Таблица 11. 2 вариант расписание рейсов

Дни недели	Рейсы	Пункты												Время, T_k
Понедельник	r_1,r_4	s_1	s_2	s_3		s_5			s_8	s_9	s_{10}		s_{12}	11
Вторник	r_2,r_9	s_1	s_2	s_3	s_4		s_6	s_7			s_{10}		s_{12}	9
Среда	r_3			s_3		s_5	s_6			s_9		s_{11}		7
Четверг	r_5,r_6		s_2	s_3	s_4			s_7			s_{10}	s_{11}	s_{12}	9
Пятница	r_7,r_8	s_1	s_2	s_3		s_5		s_7		s_9	s_{10}	s_{11}		11
Суббота	r_{10}	s_1						s_7				s_{11}		7

Общее время работы всех машин за неделю: $T = 11 + 9 + 7 + 9 + 11 + 7 = 54$ ч.

Первый вариант раскраски графа показал, что общее время работы всех машин за неделю составляет T=56 ч. Использовав операцию слияние вершин в графе мы доказали, что 56 ч – это не минимальное время работы всех машин за неделю. Рассмотрев второй вариант раскраски графа можно увидеть ,что общее время работы всех машин за неделю составляет T = 54 ч. Таким образом, общее время работы всех машин за неделю составляет 54 ч.

Задача 2. Заданы множества $R = [r_1, r_2, \ldots, r_{10}\}$, $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_{12}\}$ и $l = 2$ рейсы? пункты и машины соответственно. 10 рейсов разбиты на 3 группы:

1 группа. Долгие рейсы - 11 ч.

2 группа. Средние рейсы - 9 ч.

3 группа. Быстрые рейсы - 7 ч.

Необходимо распределить рейсы так, чтобы среди нескольких дней недели ни в один день число рейсов не превосходило число машин, и каждый пункт посещался хотя бы один раз в неделю.

В таблице 12 отмечены рейсы, которые содержат один и тот же пункт. Требуется определить общее время работы всех машин за неделю, $T = min_{P(G)} \sum_k T_k$, где минимум вычисляется на P(G) - множестве всевозможных раскрасок графа G.

T_κ - максимальное время в κ-$й$ день, $T_{\kappa} = max(t_{kl}, t_{k2}, \ldots, t_{ks})$, где s - это количество рейсов в κ-$й$ день.

Таблица 12. Расписание рейсов для задачи 2

Рейсы	Пункты												Время, T_k
	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8	s_9	s_{10}	s_{11}	s_{12}	
r_1	+	+	+		+				+	+			11
r_2	+		+	+		+	+			+		+	9
r_3			+		+	+			+		+		7
r_4								+				+	7
r_5		+		+			+				+		7
r_6			+							+		+	9
r_7	+		+				+		+				11
r_8		+			+					+	+		11
r_9		+											9
r_{10}	+						+				+		7

Решение. Построим граф с вершинами $r_1, r_2, \ldots, r_{10}$. Соединим ребрами вершины, соответствующие рейсам, которые содержат один и тот же пункт. Получим граф, изображенный на рисунке 12. Вершины $r_1, r_2, r_3, r_5, r_8, r_{10}$ образуют полный подграф, изоморфный графу K_6.

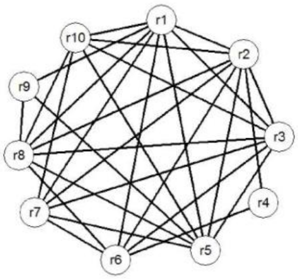
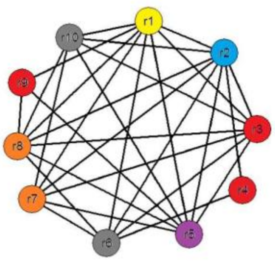


Рис. 12. Граф к задаче о составлении рейса машин с вывозом товара

Следовательно хроматическое число графа не меньше 6, $\boldsymbol{x(G)\geq 6}$. На рисунке 13. указана первый вариант раскраски графа в 6 красок.



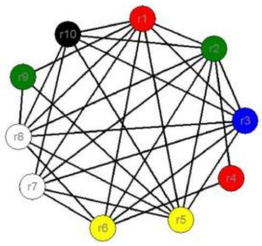


Рис. 13. I вариант раскраски графа Рис. 14. II вариант раскраски графа

На графе видно, что вершины $\boldsymbol{r_3, r_4}$ и $\boldsymbol{r_9}$ раскрашены в красный цвет, но по свойствам расписания рейсов число рейсов не должно превосходить число машин, т.е. $\boldsymbol{r_i}\leq 2$. Следовательно, это раскраска не удовлетворяет условиям задачи по числу машин.

Рассмотрим второй вариант раскраски графа в соответствии с нашими свойствами. На рисунке 14 указана новая раскраска графа и она подходит нашим условиям.

Значит, хроматическое число графа равно 6, $\boldsymbol{x(G)} = 6$, т. е. все рейсы можно посетить за шесть дней.

Соответствующее расписание рейсов по дням указано в таблице 13.

Таблица 13. II вариант расписание рейсов

Дни недели	Рейсы	Число машин	Пункты												Время, T_k
Понедельник	r_1,r_4	**2**	s_1	s_2	s_3		s_5			s_8	s_9	s_{10}		s_{12}	11
Вторник	r_2,r_9	**2**	s_1	s_2	s_3	s_4		s_6	s_7			s_{10}		s_{12}	9
Среда	r_3	**1**			s_3		s_5	s_6			s_9		s_{11}		7
Четверг	r_5,r_6	**2**		s_2	s_3	s_4			s_7			s_{10}	s_{11}	s_{12}	9
Пятница	r_7,r_8	**2**	s_1	s_2	s_3		s_5		s_7		s_9	s_{10}	s_{11}		11
Суббота	r_{10}	**1**	s_1						s_7				s_{11}		7

В понедельник выполняются рейсы $\boldsymbol{r_1, r_4}$, вершины которого раскрашены в красный цвет и указано максимальное время работы машины за этот день $\boldsymbol{T_1=11}$. Во вторник выполняются рейсы $\boldsymbol{r_2}$, $\boldsymbol{r_9}$. Соответствующие ему вершины покрашены в зеленый цвет, а время работы равно $\boldsymbol{T_2=9}$. В среду выполняется один рейс r_3, соответствующая ему вершина покрашена в синий цвет и время выполнения всех рейсов равно $\boldsymbol{T_3=7}$. В четверг выполняются рейсы $\boldsymbol{r_5}$, $\boldsymbol{r_6}$, соответствующие им вершины раскрашены в желтый цвет и время работы равно $\boldsymbol{T_4=9}$. В белый цвет покрашены вершины, соответствующие рейсам r_7,r_8, которые выполняются в пятницу за время $\boldsymbol{T_5=11}$. В субботу выполняется один рейс $\boldsymbol{r_{10}}$ (вершина черного цвета) за время $\boldsymbol{T_6=7}$.

Таким образом, общее время работы всех машин за неделю $\boldsymbol{T}$ = 11 + 9 + 7 + 9 + 11 + 7 = 54 ч.

Заключение

На данный момент раскраска графов является одной из самых популярных и интенсивно изучаемых тем в теории графов.

В последнее время ей уделяется очень много внимания в математических кругах, так как, возникшая при решении головоломок и различных занимательных задач, теория графов стала простым, но, несмотря на это, достаточно отличным средством решения задач и вопросов, относящихся к обширному кругу проблем.

В данной работе были выбраны типы прикладных задач из различных источников, их постановку в терминах теории графов, сформулированы некоторые обобщения задачи о составлении расписания рейсов машин с вывозом товаров и были найдены решения сформулированных задач с помощью раскраски графов.

В обобщенной задаче о составлении расписания рейсов машин с вывозом товаров был предложен способ удовлетворения двусторонней оценки минимального времени работы всех машин за неделю. Уточнение происходит с помощью раскраски графов, а именно нахождения хроматического числа и слияние вершин. Решение задачи нахождения хроматического числа и правильной раскраски графа является сложной задачей и эффективные алгоритмы на данный момент не известны. Эти задачи очень трудны в решении без использования дополнительного программного обеспечения. Решение обобщенных задач было продемонстрировано на примерах.

Таким образом, задачи решены в полном объеме, цель достигнута.

Список литературы

1. Зимин, С. Н. Составление учебного расписания, используя теорию графов т] / С. Н. Зимин// Современные наукоемкие технологии: сб. статей. - Пенза, 2007. - №11
2. Лебедев, Б. К. Алгоритм раскраски графов/ Б. К. Лебедев, О. Б. Лебедев // Известия Юфу. Технические науки: сб статей. - Ростов-на-Дону, 2015
3. Мельников, О. Теория графов в занимательных задачах: учеб.-метод. пособие для общеобразоват. шк./ О. И. Мельников. - 5-е изд. - М.: ЛИБРОКОМ, 2013. - 237 с.
4. Моторина, Е. А. Структура и содержание занятия «Раскраски графов» факультативного курса «Элементы теории графов и ее приложения»/Е. А. Моторина// Успехи современной науки и образования: сб. науч. статей. — Белгород, 2015. — №3
5. Соколова, А. А. Раскраска графов/ А. А. Соколова //Ломоносовские чтения на Алтае: фундаментальные проблемы науки и образования: сб. науч. статей/АГУ. - Барнаул, 2015
6. http://bookre.org/reader?file= 1221065
7. http://mk.cs.msu.ru/images/1/1b/Dm-mag-lect7i-selezn.pdf
8. http://grafoanalizator.unick-soft.ru
9. https://en.wikipedia.org/wiki/Graph coloring
10. http://www.wolfram.com/mathematica

Рецензия на исследовательскую работу по теме

«Обобщение некоторых задач, сводящихся к раскраске графов»

ученицы 11А класса МБОУ СОШ № 18 г. Пензы

Айсиной Алины

Исследовательская работа посвящена актуальной теме применения теории графов при решении различных практических и научных задач. Цель работы четко сформулирована и обоснована. План исследования включает в себя все необходимые этапы для достижения цели.

Исследовательская работа имеет логически правильную структуру. Она состоит из введения, теоретической части, практической части, заключения, а также списка использованной при написании исследовательской работы литературы и приложений. Работа грамотно оформлена. Она содержит большое количество материала, что позволяет более наглядно раскрыть ее основные результаты.

Тема работы полностью раскрыта, Алина демонстрирует знания, выходящие за рамки школьной программы. В реферативной части Алина раскрывает теоретические основы теории графов в объеме, необходимом для решения поставленной задачи. Девочка грамотно проанализировала большое количество литературы по заданной тематике.

Работа является исследовательской, поэтому способствует развитию познавательного интереса, аналитических способностей, различных способов восприятия и обработки информации.

В практической части Алина проводит собственное исследование, используя математический аппарат с привлечением информационной составляющей. Обобщив полученные результаты, девочка приходит к общению задач, сводящихся к раскраске графов.

На протяжении всего периода работы над проектом у ученицы формировались необходимые предметные знания и умения, общеучебные умения и навыки, необходимые компетентности.

Данную работу можно использовать в качестве дидактического материала для организации факультативных занятий преподавателями школы.

Таким образом, можно заключить, что поставленные цели и задачи успешно раскрыты.

Дата: 25.12.2020г. Рецензент: :

Жистина Л.Ф., учитель математики

Подпись Жистиной Л.Ф. заверяю

Директор МБОУ СОШ № 18 г. Пензы А.С. Кирсанов