Муниципальное общеобразовательное учреждение
средняя общеобразовательная школа с. Старая Потловка
им. Героя Советского Союза Н.А. Зиновьева

Районная научно – практическая конференция «Старт в науку»

Секция: математика, физика, информатика

Софизмы и парадоксы

Исследовательская работа

Работу выполнила:
учащаяся 10 класса МОУ СОШ
с. Старая Потловка
Горяинова Ольга
Руководитель:
учитель МОУ СОШ
с. Старая Потловка
Полюхина В.В.

2020 г

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Математика – одна из самых интересных и увлекательных наук в мире. Она таит в себе множество интересных загадок и закономерностей. С одной из математических загадок я столкнулась в школьном курсе алгебры. Этому и посвящена моя научно – исследовательская работа.

На одном из уроков я решала тригонометрические уравнения. Выполнив все возможные преобразования, я сравнила свой результат с ответом в учебнике и обнаружила несовпадение. Вместе с классом мы проверили решение, но ошибка так и не была найдена. Как пояснила потом учительница, ошибка на самом деле была, но она не столь очевидна. Притом, этот нюанс приводит к неверному результату.

Данная ситуация меня заинтересовала, и я решила узнать, как называется столь необычное явление.

Используя дополнительную литературу и информацию в сети Интернет, я узнала, что нам пришлось столкнуться с софизмом.

Интересно то, что скрытый в решении подвох приводит к неправильному результату. Я решила внимательно изучить эту тему и привлечь к ней внимание других. Знание этих особенностей поможет людям решать задачи правильно, избегая незаметных, на первый взгляд ошибок.

Актуальность: Каждый ученик может столкнуться с софизмом. Они встречаются и в задачах ЕГЭ. Моя работа поможет людям быть внимательнее и не допускать ошибок в решении. Важно и то, что такие задачи развивает внимательность и логику, способствует развитию нестандартного мышления.

Цель исследования: Узнать, что представляют собой софизмы и какое отношение они имеют к нашей жизни, понять, как не допустить ошибку, столкнувшись с ними.

Задачи исследования:

1) Узнать историю появления софизмов и выяснить их суть.
2) Найти и подобрать задачи, содержащие софизмы.
3) Выяснить, умеют ли ученики нашей школы находить софизмы в задачах.
4) Наглядно продемонстрировать софизмы в решении и найти путь как их избежать.

5) Провести анкетирование и сделать вывод, помогли ли ребятам новые сведения, и есть ли смысл, в проделанной мной работе.

Методы исследования:

1. Поиск информации в сети Интернет и анализ специальной литературы.
2. Решение задач по выбранной теме.
3. Анкетирование.
4. Анализ полученных результатов.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

1.1 Софисты – прогрессивные мыслители древности.

Термин «софизм» (от греческого слова *sophisma*) – измышление, хитрость, уловка, головоломка, уловка, ухищрение.

Значение слова ***софизм*** по Ожегову:

Софизм – формально кажущее правильным, но по существу ложное умозаключение, основанное на преднамеренно неправильном подборе исходных положений.

Значение слова ***софизм*** по словарю Даля:

Софизм – м. лжеумствованье, - мудрствованье, ложный вывод, заключенье, сужденье, которому придан внешний вид истины.

Софизм – это цепочка правдоподобных и внешне строгих рассуждений, приводящих к противоречию или абсурдному выводу. Софизм вводится на внедрение в цепочку рассуждений замаскированной ошибки в форме неверного, но правдоподобно выглядящего предположения или рассуждения.

Термин «парадокс» является объединением двух греческих слов. «Пара» - около, «дока» - мнение, ожидание. Означает то, что представляет из себя нечто странное, необычное (или то, что кажется таковым).

Два этих понятия противоположны по своему значению. Софизм – это ложь, которая кажется правдивой. Парадокс – это истина, которая кажется абсурдом. По словам писателя Даниила Гранина «Софизм – это ложь, обряженная в одежды истины, а парадокс – истина в одеждах лжи».

Рассмотрим историю возникновения этих терминов.

Софистами называли группу древнегреческих философов, живших в 4 – 5 веках до нашей эры. Предполагается, что они были учёными – просветителями во времена внутреннего расцвета Греции. Софист в переводе означает «мастер слова» или «учитель мудрости».

Софисты сумели создать такую область науки, которая соединила в себе политические, философские и естественнонаучные взгляды. По сути, их знания были энциклопедическими.

«Софисты были людьми остроумными, талантливыми и очень практичными. Они первыми почувствовали силу логических доводов, силу убеждений и постарались сделать из этого настоящее искусство, дающее почти магическую власть над людьми» - суждения о софистах Г.Н. Волкова

(советский учёный – публицист).

Впоследствии софистами стали называть учителей, задачей которых было научить своих учеников «мыслить, говорить и делать». Итак, греческие учёные – философы сыграли положительную роль в истории развития человеческой мысли. Именно софисты являлись авторами первых софизмов и парадоксов.

1.2 Известные софизмы прошлого.

1) Рогатый софизм. Приписывается Евбулиду.

Ты имеешь то, что не терял. Рога ты не терял, значит, у тебя имеются рога.

2) Софизм учёбы. Когда же учится?

Софизм учёбы заключён в песенке, сочиненной английскими студентами:

Чем больше учишься, тем больше знаешь.

Чем больше знаешь, тем больше забываешь.

Чем больше забываешь, тем меньше знаешь.

Чем меньше знаешь, тем меньше забываешь.

Но чем меньше забываешь, **тем больше знаешь**.

Так для чего учиться?

Докажем, что в 2020 году нам совсем не придётся учиться.

Половину суток - ночь, ночью занятий нет.

366 – 183 = 183 (дня).

Занятия в школе примерно занимают половину дня. Половина дня – это $\frac{1}{4}$ часть суток. Выбрасываем из 183 дней четвёртую часть

183 – 183:4 = 138(дней)

Прикинем, сколько это в неделях. Воскресенье и субботу мы не занимаемся. Уберём и эти дни.

138 :7 = 19(недель), 19 • 2= 38(дней), 138 – 38 = 100(дней).

На каникулы(без выходных дней) приходится: осенние(5), зимние(10), весенние(7), летние(78).

5 + 10 + 7 + 78 = 100.

Итого 100 – 100 = 0. Т.е., мы не учимся совсем.

3) Полупустое тоже, что и полуполное.

Полупустое есть то же, что и полуполное. Если равны половины, значит, равны и целые. Следовательно, пустое есть то же, что и полное.

(Ошибка: полупустое не является половиной чего либо пустого, а является чем либо наполовину наполненным.)

4) Вор.

Вор не желает приобрести ничего дурного. Приобретение хорошего есть дело хорошее. Следовательно, вор желает хорошего.

5)Ты не человек.

Я человек, ты не я, значит ты не человек.

….

1.3 Софизмы современности. Реклама и PR – деятельность.

Практика использования методов аргументации становится все более использованной в массово – коммуникационной деятельности. Софизм, как метод доказательства становится важным профессиональным инструментом ***PR***– деятельности.

Софизм за счёт видимой стройности рассуждений располагает к себе адресата коммуникации и поэтому его осознанно используют в своей деятельности специалисты по коммуникациям. Софизм создаёт благоприятные условия для принятия объектом коммуникации сообщения.

Намеренно созданный, он уменьшает потерю важной информации за счёт облегчения процесса восприятия, фиксирует внимание у адресата коммуникаций.

Таким образом использование софизма вызывает эффект ***фасцинации***(от анг. слова *fascinate* - очаровывать, пленять). То есть фасцинация – это «сигнал», создающий «благоприятные условия для принятия информации»

(Кнорозов 2010).

Приведём пример. **Реклама известного шампуня** (актриса М. Александрова, играющая роль Екатерины Великой). Софизм «Мои волосы – моя корона» вызывает эффект фасцинации и служит условием для запоминания марки шампуня, который следует покупать.

1.4 Классификация математических софизмов.

Математический софизм – удивительное утверждение, в доказательстве которого кроются незаметные, а подчас и довольно тонкие ошибки. Математические софизмы приучают внимательно и настороженно продвигаться вперёд, тщательно следить за точностью формулировок, правильностью записи чертежей, законностью математических операций. Очень часто понимание ошибок в софизме ведёт к пониманию математики в целом, помогает развивать логику и навыки правильного мышления. Если нашёл ошибку в софизме, значит, ты её осознал, а осознание ошибки предупреждает от её повторения в дальнейших математических рассуждениях. Софизм не приносят пользы, если их не понимать. Софизм способствует воспитанию уважения к строгим(надёжным) доказательствам.

Очень часто софизмы можно встретить в старых учебных пособиях.

Математические софизмы относятся к сложным софизмам.

При разборе математических софизмов выделяются основные ошибки:

1) деление на 0; 2) неправильные выводы из равенства дробей; 3) неправильное извлечение квадратного корня из квадрата выражения; 4) нарушения правил действия с именованными величинами; 5) путаница с понятиями «равенства» и «эквивалентность» в отношении множеств; 6) проведение преобразований над математическими объектами, не имеющими смысла; 7) неравносильный переход от одного неравенства к другому; 8) выводы и вычисления по неверно построенным чертежам; 9) ошибки, возникающие при операциях с бесконечными рядами и

предельным переходом.
Математических софизмов достаточно много. Я нашла некоторые из них.

Деление на ноль.

- *Уравнение **x – a = 0** не имеет корней.*
- *Любое число равно меньшему числу.*
- *Доказательство равенства **5 = 7**.*
- *Софизм разности квадратов.*
- *Всякое число равно своему удвоенному значению.*
- *Неравные числа равны.*
- *…*

Разберём некоторые из них.

1)Всякое число равно своему удвоенному значению.
Запишем очевидное для любого числа а тождество
$a^2 - a^2 = a^2 - a^2$, вынесем a в левой части за скобку, а правую часть разложим на множители по формуле разности квадратов, получим
$a(a - a) = (a + a)(a - a)$.Разделивобечастина$a - a$, получим$a = a + a$, или$a=2a$.
Итак, всякое число равно своему удвоенному значению.
Разбор софизма.Здесь ошибочен переход к равенству $a=2a$. В самом деле, число $a - a$, на которое делится равенство $a(a - a) = (a + a)(a - a)$ равно нулю. А **на ноль делить нельзя.**
2)5 = 7.
Пусть а =3/2в
Умножая обе части на 4, получим $4a = 6b$, но
$4a = 14a - 10a$ и$6b = 21b - 15b$.Тогда
$14a - 10a = 21b - 15b$,или $15b - 10a = 21b - 14a$;
$5(3b - 2a) = 7(3b - 2a)$. Разделив обе части на
$3b - 2a$, будем иметь $5 = 7$. А **на ноль делить нельзя.**
Разбор софизма.Выражение$3b - 2a= 0$. А **на ноль делить нельзя.**
3)*Неравные числа равны.*
Возьмем два неравных между собой произвольных числа a и b. Пусть их разность равна с, т.е. $a-b=c$. Умножив обе части этого равенства на $a-b$, получим $(a-b)^2 = c(a-b)$, а раскрыв скобки, придём к равенству $a^2 - 2ab + b^2 = ca - cb$, из которого следует равенство $a^2 - ab - ac = ab - b^2 - bc$. вынося общий множитель$a$ слева и общий множитель bсправа за скобки, получим $a(a-b-c) = b(a-b-c)$. Разделив

последнее равенство на $(a-b-c)$,получаем, что $a=b$, другими словами, два неравных между собой произвольных числа aи bравны.

Разбор софизма. Здесь мы имеем **деление нуля на нуль**, которое не имеет смысла, поскольку равенство $a\cdot 0=b\cdot 0$ выполняется при любых a и b.

Неправильное извлечение квадратного корня из квадрата выражения.

1)Чётное число равно нечётному

Возьмём произвольное чётное число $2n$, где n-любое целое число, и запишем тождество $(2n)^2-2n(2(2n)+1)=(2n+1)^2-(2n+1)(2(2n)+1)$, в справедливости которого нетрудно убедиться, раскрыв скобки. Прибавив к обеим частям этого тождества $\left(\frac{2(2n)+1}{2}\right)^2$, перепишем его в следующем виде: $(2n)^2-2(2n)\cdot\frac{2(2n)+1}{2}+\left(\frac{2((2n)+1)}{2}\right)^2=(2n+1)^2-2(2n+1)\cdot\frac{2(2n)+1}{2}+\left(\frac{2(2n)+1}{2}\right)^2$,

или в таком: $\left(2n-\frac{2(2n)+1}{2}\right)^2=\left(2n+1-\frac{2(2n)+1}{2}\right)^2$; $\sqrt{2n-\frac{2(2n)+1}{2}}=\sqrt{2n+1-\frac{2(2n)+1}{2}}$,

$2n-\frac{2(2n)+1}{2}=2n+1-\frac{2(2n)+1}{2}$, или $2n=2n+1$,

что означает равенство чётного числа нечётному.

Разбор софизма.Квадратные корни из квадратов выражений не всегда равны.

Нарушение правил действия с именованными величинами.

1) Один рубль не равен ста копейкам.

Известно, что любые два равенства можно перемножить почленно, не нарушая при этом равенства, т. е. если a = b и c = d, то ac = bd. Применим это положение к двум очевидным равенствам: 1 рубль = 100 копейкам, 10 рублей = 1000 копеек. Перемножая эти равенства почленно, получим: 10 рублей = 100 000 копеек и, наконец, разделив последнее равенство на 10, получим, что 1 рубль = 10 000 копеек.

Таким образом, один рубль не равен ста копейкам.

Разбор софизма. Ошибка, допущенная в этом софизме, состоит в нарушении правила действий с именованными величинами: все действия, совершаемые над величинами, необходимо совершать также и над их размерностями.

2) ***С возрастом год становится короче(современный софизм).***

Многие считают, что чем старше они становятся, тем быстрее бежит время, т.е. год становится короче.

Известный аварский поэт Расул Гамзатов так писал об этом:

Годы детства мои,
Как я вас торопил,
Я спешил, вы спешили не очень.
…
Время, взяв меня за руку,
В юность ввело
…
И теперь как назло,
Надо мной пролетает, как птица.

Оказывается это можно доказать математически. Допустим, что человек прожил 20 лет. Значит, за последний год он прожил $\frac{1}{20}$ своей жизни. Если он прожил 40 лет, то за последний год он прожил $\frac{1}{40}$ жизни. За 60 лет – $\frac{1}{60}$. Сравниваем эти дроби $\frac{1}{60} < \frac{1}{40} < \frac{1}{20}$. Последний год короче второго, а второй короче первого. Где ошиблась математика?

Разбор софизма. Ошибка, допущенная в этом софизме, состоит в нарушении правила действий с именованными величинами. Каждый раз год сравнивался с отрезками времени, разными по величине.

Неравносильный переходот одного неравенства к другому.

1)Число равное другому числу, одновременно и больше, и меньше его.

Возьмём два произвольных положительных равных числа а и b и напишем для них следующие очевидные неравенства: ***a*> - *b*** и ***b*> - *b***. Перемножив оба эти неравенства почленно, получим неравенство $ab > b^2$, а после его деления на b, что вполне законно, так как по условию ***b*> *0***, придём к выводу, что ***a*>*b***. Записав же два других верных неравенства ***b*> - *a*** и ***a*> - *a***, аналогично предыдущему получим, что $ba > a^2$, а разделив на ***a*> *0***, придём к неравенству ***a*<*b***. Итак, число а, равное числу b, одновременно и больше, и меньше его.

Разбор софизма. Ошибка, допущенная в этом софизме, состоит в нарушении неравносильного перехода от одного неравенства к другому. Мы имеем право умножать числовые неравенства только в том случае, если их левые и правые части положительны.

2)Всякое положительное число является отрицательным.

Пусть ***n***– положительное число. Очевидно, ***2n-1<2n***.Возьмём другое произвольное положительное число*a* и умножим обе части неравенства на ***(- a):*** *-2an+a<-2an;/+ 2an; a<0*

Поусловию*a* – положительное число. После алгебраических преобразований мы получили что *a* – отрицательное число. Значит **– любое положительное число является отрицательным.**

Разбор софизма. Ошибка, допущенная в этом софизме, состоит в нарушении неравносильного перехода от одного неравенства к другому. Если

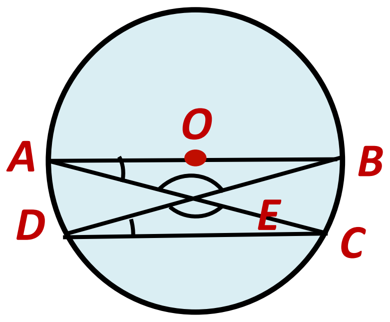
a – положительное число, то (– *a*) – отрицательное число. При умножении неравенства на отрицательное число его знак меняется на противоположный.

Выводы и вычисления по неверно построенным чертежам и неправильному применению теорем.

- *Гипотенуза равна катету.*
- *Любая окружность имеет два центра.*
- *В любой окружности можно построить хорду, не проходящую через центр, но равную диаметру.*
- *Средняя линия любой трапеции равна нулю.*
- *Прямой угол равен тупому.*
- …

Разберём некоторые из них.

1)В любой окружности можно построить хорду, не проходящую через центр, но равную диаметру.



Пусть ***AB*** – диаметр, ***AC*** – хорда данной окружности,

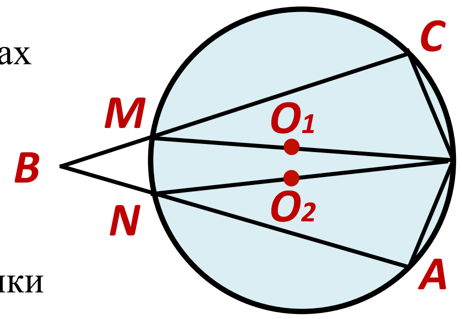
E – середина хорды ***AC***. Через точки ***B*** и ***E*** проведём

Хорду ***BED***. Точки ***D*** и***C***соединим отрезком прямой.

$\angle AEB = \angle DEC$ как вертикальные, $\angle A = \angle D$, как вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу ***BC***; ***AE* = *EC*** по построению. Значит ***∆ ABE* = *∆DEC***(по стороне и двум углам). Но в равных треугольниках против равных углов лежа равные стороны, т.е. ***AB* = *DC***.

Разбор софизма. Ошибка, допущенная в этом софизме, состоит в неправильном применении признака равенства треугольников. Формулировка признака «два прилежащих к ней угла», а в $\triangle$***DEC***угол***D***не прилежащий к стороне ***EC***.

2) Любая окружность имеет два центра.



Возьмём произвольный угол ***ABC*** и на его сторонах

Произвольные точки***A*** и ***C***. Из этих точек

Построим перпендикуляры к сторонам ***AE*** и ***CE***

До их взаимного пересечения в точке ***E***. Через точки

A, ***C*** и***E*** проводом окружность. Обозначим точки пересечения этой окружности со сторонами ***AB*** и ***BC*** буквами ***N***и ***M***. Соединяя точки ***M*** и ***N*** с точкой ***E***, получим две хорды ***ME*** и ***NE***, на которые опираются вписанные прямые углы. Значит, хорды ***ME*** и ***NE*** – диаметры данной окружности, а сама окружность имеет два центра O_1и O_2.

Разбор софизма. Ошибка в чертеже. Окружность, проведённая через точки А, С и Е должна пройти через вершину В.

1.5. Рассмотрим понятие парадокса.

«Парадокс это изначально мнение, расходящееся с общепринятыми представлениями в науке и обществе. Парадоксы указывают на неполноту или ошибочность какой либо научной теории».

Всё непонятное новое сначала как «бред» - парадокс, а потом как очевидность – его разрешение. Поэтому парадоксы подталкивают развитие науки. И ввиду этого они необходимы и полезны. Несмотря на это, наука очень часто негативно относилась к парадоксам и к людям, которые их осмеливались выдвинуть. Известен научный подвиг Н. И. Лобачевского – автора первой неевклидовой геометрии, который был лишён всех своих научных званий за новый(парадоксальный, для своего времени) взгляд на геометрию.

1.6. Большинство парадоксов прошлого приписывают Зенону и Эвбулиду.

Эвбулид автор таких известных парадоксов: «Лжец», «Куча», «Плешивый».

1) ***Парадокс Лжеца – «король парадоксов»***

– Сказанное Платоном – ложно, – говорит Сократ.

– То, что сказал Сократ – истина, – говорит Платон.

В более простом варианте, человек говорит «Я лгу». С одной стороны, он говорит правду, т.к. это утверждает. Но это означает, что он утверждает истину, а, следовательно, лжет.

Известно много вариантов парадокса Лжеца. Один из них – **парадокс Пиноккио.** Всем известно, что когда Пиноккио лжёт, то его нос заметно увеличивается. Что произойдёт, если Пиноккио скажет «Сейчас у меня удлинится нос».

Если нос не увеличится, значит, мальчик соврал, и нос обязан будет тотчас вырасти. А если нос вырос, значит, мальчик сказал правду, но тогда почему вырос нос.

2) ***Парадокс «Куча».***

Одно зерно кучи не составляет. Если прибавить ещё одно зерно – это тоже не куча. Так с какого же зерна начинается куча?

3) ***Парадокс «Плешивый».***

«Потеряв один волос, еще не становишься лысым; потеряв второй волос – тоже; когда же начинается лысина?»

Одни из самых сложных парадоксов – это парадоксы(апории) Зенона. Некоторые из них неразрешены и до сегодняшнего времени. Один из них – парадокс сложения.

4) ***Парадокс сложения.***

Любое тело состоит из точек. Каждая точка не имеет измерения. Их сумма имеет нулевое измерение. Значит, тело, имеющее измерение, оказывается лишено такового.

5) ***Парадоксы невозможности движения. «Стрела» и «Ахиллес никогда не догонит черепаху».***

В каждый момент времени стрела неподвижна. Значит, движение не начнётся никогда.

Пока Ахиллес будет добираться до того места, где первоначально находилась черепаха, она на немного, но удалится. Это движение будет продолжаться бесконечно. И хотя Ахиллес будет приближаться к черепахе, догнать он её окончательно не сможет никогда.

Апория(по Зенону) выглядит так: сначала Ахиллес проходит половину пути, потом половину половины. Т. е. он будет двигаться так медленно, что его можно считать неподвижным. Циник Антисфен опроверг эту апорию тем, что встал и начал ходить перед Зеноном. «Движенья нет, сказал мудрец брадатый; другой смолчал и стал пред ним ходить, сильнее бы не мог он возразить» (А.С. Пушкин)

Из более поздних известен:

6) Парадокс цирюльника.

В некоторой деревне, где жил один парикмахер, был издан указ «Парикмахер имеет право брить тех и только тех жителей деревни, которые не бреются сами».

Вопрос «Может ли парикмахер брить самого себя?»

Если он хочет брить самого себя, то он не может этого сделать, т.к. он может брить только тех, кто сам себя не бреет. Если он не будет себя брить, то, как и все не бреющие себя, он должен брить самого себя.

Итак, он не может ни брить себя, ни не брить самого себя.

К парадоксам современности можно отнести **«итальянскую забастовку»** или так называемую **работу по правилам.**

7) Итальянская забастовка.

«Итальянскую забастовка – форма протеста, при которой сотрудники предприятия предельно строго исполняют свои должностные обязанностии правила, ни на шаг не отходя от них и ни на шаг не выходя за их пределы. Иногда, итальянскую забастовку называют работой по правилам»(Википедия)

Парадокс заключается в том, что работать, соблюдая все правила и инструкции практически невозможно. В конечном итоге работа по правилам приводит к снижению производительности труда, что влечёт за собой существенные убытки для предприятия. Второй парадокс заключается в том, что и работодатель не может ни наказать, ни заменить работника, т. к. формально он как бы работает.

1.7 . Одним из направлений современного искусства является «имп – арт»(импоссибилизм). Имп – арт – изображение невозможных фигур. К невозможным фигурам, художники данного направления относят фигуры, которые можно изобразить, но нельзя создать. Невозможные фигуры по сути – геометрические парадоксы. Элементы изображения, выполненные по законам этого жанра, невозможно воспринимать однозначно. Каждый человека, рассматривающий картину, будет видеть её по – своему. Родоначальником имп – арта считается Оскар Реутерсвард – шведский художник. Он создал более тысячи невозможных фигур. Три картины художника шведское правительство решило увековечить на почтовых марках.

Одна из них – "невозможный треугольник".

Однако он стал широко известен, когда подобный треугольник изобразил

Р. Пенроуз, назвав его «трёхблочник». Он является и автором «бесконечной лестницы». К невозможным фигурам относятся «сумасшедший ящик», «скобка из трёх элементов» или «космическая вилка».

Дальнейшую известность невозможные фигуры получили благодаря творчеству голландского художника Морица Эшера. Он был очень увлечён математикой и использовал эти фигуры в своих произведениях.

Например, в картине «Водопад» – невозможный треугольник, в картине «Восхождение и спуск» – бесконечная лестница в картине «Белведер» – сумасшедший ящик.

Несмотря на неоднозначность восприятия, картины имп – арта не только оригинальны, но приносят эстетическую и практическую пользу. В частности их используют в психотерапии, как средство для концентрации внимания и развития образного мышления.

ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

2.1. Предварительное анкетирование.

Опрошено – 26 человек.

1) Да – 1 – 4% . Нет – 25 – 96%.
2) Да – 24 – 92%. Нет – 2 – 8%.
3) Да – 16 – 61%. Нет – 6 – 39%.
4) Да – 18 – 69%. Нет – 8 – 31%.

2.2 Составление новых софизмов.

Можно попытаться составить свой софизм, используя известные софизмы. Возьмём софизм **2 · 2 = 5.** Рассмотрим одно из его доказательств.

$4 : 4 = 5 : 5$
$4(1 : 1) = 5(1 : 1)/(1 : 1)$
$4 = 5;$
$4 = 2^2$
$2 \cdot 2 = 5$
В первой строчке единица расписывается как 4 : 4 и 5 : 5. Но мы можем вместо этих чисел взять числа, которые являются квадратами натуральных чисел, и тогда мы докажем, что все квадраты натуральных чисел равны. Более того мы можем взять вообще любое положительное рациональное число, тогда мы докажем что все положительные числа равны.

2.3. Практические рекомендации в нахождении софизмов при решении уравнений.

Эквивалентность – равносильность, равнозначность, равноценность, отношение равенства.

«Эквивалентность – отношение типа равенства(в логике и математике)» – энциклопедический словарь.

«Эквивалентность вообще – любое отношение между вещами, при котором , при определённых условиях можно одно заменять другим, при этом изменяя существенно ситуацию» – толковый словарь по психологии.

1) Фрагмент урока.

Два уравнения называются равносильными, если множество их решения совпадают. При использовании софизмов происходит нарушение равносильности, что ведёт к расширению или сужению области определения уравнений, т.е к появлению посторонних корней или потере корней.

Вот некоторые софизмы, которые приводят к этому.

К софизмам, расширяющим область определения уравнения, относятся:

1. Умножение на величину, содержащую переменную;
2. Возведение частей уравнения в чётную степень.
3. …

К софизмам, сужающим область определения уравнения, относятся:

1. Деление на величину, содержащую переменную;
2. Извлечение корня чётной степени.
3. …

Наиболее опасны последние софизмы, т. к. посторонние корни можно отбросить проверкой, а вот увидеть потерю корней гораздо труднее. Рассмотрим уравнение из учебника $2\sin^2 x = \sqrt{3}\sin 2x;$ делая замену по формуле $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ получаем $2\sin^2 x = 2\sqrt{3}\sin x \cos x;$ сокращаем на $2\sin x$ получаем $\sin x = \sqrt{3}\cos x / \cos x$ откуда $tgx = \sqrt{3}; x = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z.$

Мы разделили уравнение на $\sin x$ – величину, содержащую переменную. Такое деление относится к софизмам, которысужают область определения уравнения и могут привести к потерям корней.

Правильным решением будет перенос слагаемых в одну сторону и разложение на множители $\sin x(\sin x - \sqrt{3}\cos x) = 0$. Тогда мы получим потерянный корень $x = \pi n, n \in Z.$

В тригонометрии используется ряд формул, нарушающих область определения уравнения, т.к. левые и правые части этих формул имеют разные области определения. Использование данных формул также является софизмами, нарушающим равносильность уравнения. Приведём примеры таких формул

$$1)\cos^2\alpha=\frac{1}{1+tg^2\alpha}(\alpha=\frac{\pi}{2}+\pi n,n\in Z);$$

$$2)\sin^2\alpha=\frac{1}{1+ctg^2\alpha}(\alpha=\pi n,n\in Z);$$

$$3)tg\alpha\cdot ctg\alpha=1(\alpha=\frac{\pi n}{2},n\in Z);,$$

$$tg\alpha=\frac{1}{ctg\alpha}(\alpha=\pi n,n\in Z);ctg\alpha=\frac{1}{tg\alpha}(\alpha=\frac{\pi}{2}+\pi n,n\in Z);$$

$$4)\sin 2\alpha=\frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha}(\alpha=\frac{\pi}{2}+\pi n,n\in Z);$$

$$5)\cos 2\alpha=\frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}(\alpha=\frac{\pi}{2}+\pi n,n\in Z);$$

$$6,7)tg(\alpha\pm\beta)=\frac{tg\alpha\pm tg\beta}{1\mp tg\alpha\cdot tg\beta}(\alpha=\frac{\pi}{2}+\pi n,n\in Z;\beta=\frac{\pi}{2}+\pi k,k\in Z);$$

$$8)tg 2\alpha=\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}(\alpha=\frac{\pi}{2}+\pi n,n\in Z);$$

$$9)tg\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}(\alpha=2\pi n,n\in Z);$$

$$10)ctg\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}(\alpha=\pi+2\pi n,n\in Z).$$

Рассмотрим другое уравнение $3\sin x-2\cos x=2$. Заменив $\sin x$ и $\cos x$ По формулам 4 и 5 получим

$3\cdot\dfrac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}-2\cdot\dfrac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=2$. Применение данных формул является софизмом, т.к. происходит сужение области определения уравнения. Числа $x=\pi+2\pi n,n\in Z$ выпадают из области определения уравнения, являясь при этом корнями исходного уравнения.

2) **Исследование тригонометрических уравнений вида** $a\cdot\cos x+b\cdot\sin x=c$**.**

Мною были исследованы тригонометрические уравнения на предмет потери корней. Результат исследования представлен в таблице. Универсальные подстановки при решении данных уравнений

$$\sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}};\cos x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}.$$

Уравнение	Значения переменной, нарушающие равносильность	Происходит ли потеря корня
$\sin 3z - \cos 3z = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$z = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi n}{3}, n \in Z$	нет
$3\sin x - 2\cos x = 2.$	$x = \pi + 2\pi n, n \in Z$	да
$2\sin x - \cos x = \frac{2}{5}$	$x = \pi + 2\pi n, n \in Z$	нет
$\sin z - \sin^2 z = \cos^2 z - \cos z$	$z = \pi + 2\pi n, n \in Z$	нет
$\sin 2y - 4\cos 2y = 4$	$y = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$	да

1) $\sin z - \sin^2 z = \cos^2 z - \cos z$, сделаем перенос слагаемых $\sin z + cosz = \cos^2 z + \sin^2 z$, получим уравнение $\sin z + \cos z = 1$

Заменим $\sin z = \frac{2tg\frac{z}{2}}{1+tg^2\frac{z}{2}}$ и $\cos z = \frac{1-tg^2\frac{z}{2}}{1+tg^2\frac{z}{2}}$ и избавившись от знаменателя,

имеем $5tg\frac{z}{2} - 8tg\frac{z}{2} + 3 = 0$ откуда $tg\frac{z}{2} = 1; \frac{3}{5};$ $\begin{matrix} z_1 = 2artg\frac{3}{5} + 2\pi n, n \in Z; \\ z_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z. \end{matrix}$ Как мы

видим потери корня не происходит.

2) $\sin 2y - 4\cos 2y = 4$. Сделаем аналогичную замену $\sin 2y = \frac{2tgy}{1+tg^2 y}$ и $\cos 2y = \frac{1-tg^2 y}{1+tg^2 y}$ и проделаем то же самое, что и в первом примере , получим $2tgy = 8, tgy = 4, y = artg4 + \pi n, n \in Z.$ Мы потеряли корень, при котором нарушена равносильность $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$.

3) **Исследование тригонометрических уравнений вида $a \cdot \sin x + b \cdot \cos x + c \cdot \sin 2x = d$.**

В таких уравнениях вводится новая переменная $y = \sin x \pm \cos x; y^2 = (\sin x \pm \cos x)^2 = \sin^2 x \pm 2\sin x \cdot \cos x + \cos^2 x = 1 \pm \sin 2x; \sin 2x = \pm(y^2 - 1)$

Мы видим, что в подстановке происходит возведение в квадрат, а

при возведении в квадрат происходит расширение области определения, появляются лишние корни, которые нужно отбросить.

Уравнение	Подстановка	Все корни	Лишние корни
$2\sin x-2\cos x+\sin 2x=2$	$y=\sin x-\cos x;$ $\sin 2x=1-y^2$	$x=\frac{\pi n}{2}, n\in Z;$ $0,\pm\frac{\pi}{2},\pi$	$0,-\frac{\pi}{2}:$ $Ответ. x=\pi+2\pi n, n\in Z;$ $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z.$
$2\sin x+2\cos x-2\sin 2x=\frac{1}{2}$	$y=\sin x+\cos x;$ $\sin 2x=y^2-1$	$x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z;$ $x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi k, k\in Z.$ $\pm\frac{\pi}{6},\pm\frac{\pi}{3},\pm\frac{2\pi}{3},\pm\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{6},\pm\frac{2\pi}{3},-\frac{5\pi}{6},:$ $Ответ. x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n, n\in Z;$ $x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k, k\in Z.$
$\sin x-\cos x+\sin 2x=1$	$y=\sin x-\cos x;$ $\sin 2x=1-y^2$	$x=\frac{\pi n}{2}, n\in Z;$ $x=\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z.$ $0,\pm\frac{\pi}{2},\pi,-\frac{3\pi}{4}$	$0,-\frac{\pi}{2};$ $Ответ. x=\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z;$ $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z;$ $x=\pi+2\pi l, l\in Z.$
$\sqrt{2}(\sin x+\cos x)-\sin 2x=-3$	$y=\sin x+\cos x;$ $\sin 2x=y^2-1$	$x=\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z.$ $\frac{\pi}{4},-\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4};$ $Ответ. x=-\frac{3\pi}{4}+2\pi n, n\in Z;$

Рассмотрим решение одного из уравнений. Для избавления от лишних корней применим геометрический способ.

$$2\sin x-2\cos x+\sin 2x=2$$

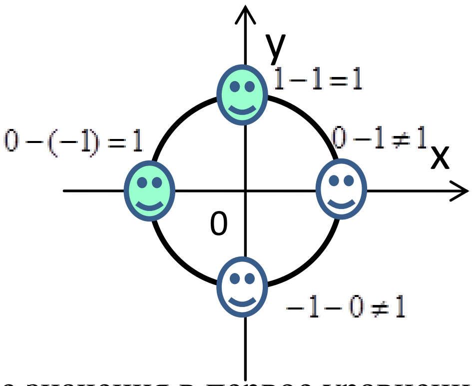
Пусть

$$y=\sin x-\cos x; (\sin x-\cos x)^2=\sin^2 x-2\sin x\cdot\cos x+\cos^2 x=1-2\sin x; \sin 2x=1-y^2$$

Подставим всё в уравнение

$$2y+1-y^2=2; y^2-2y+1=0; y=1.$$

$$\begin{cases} \sin x-\cos x=1 \\ \sin 2x=1-1^2=0 \end{cases}$$



Из последнего уравнения получаем

$$2x=\pi n, n\in Z; x=\frac{\pi n}{2}, n\in Z, x=0, \pm\frac{\pi}{2}, \pi.$$

Делаем проверку, подставляя полученные значения в первое уравнение.

Видим, что $x=0, -\frac{\pi}{2}$ не проходят эту проверку и следовательно являются посторонними корнями. Ответ $x=\pi+2\pi n, n\in Z;$ $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z.$

Исходя из выше сказанного, можно дать такие ***практические рекомендации***:

1. Изучить и понять софизмы, приводящие к сужению и расширению области определения уравнения.

2. Видеть наличие посторонних корней и уметь от них избавляться.

3. Запомнить формулы, нарушающие равносильность тригонометрических уравнений.

4. Уметь находить потерянные корни.

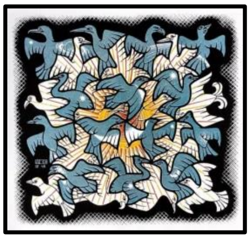
2.4 Анкетирование на неоднозначность восприятия картин имп – арта.

Всего – 11 опрошенных.

Вы считаете, что по этой лестнице поднимаются вверх? **9%**

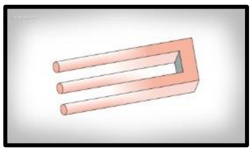
Вы считаете, что по этой лестнице опускаются вниз? **19%**

Вы считаете иначе? **72%**



Вы считаете, что на этой картине изображены белые птицы? **27 %**

Вы считаете, что на этой картине изображены синие птицы? **73 %**



Сколько зубцов у данной фигуры?

2 – **9%**; 3 – **91 %**.

2.5 Повторное анкетирование.

Опрошено – 12 человек.

1) Узнали ли вы для себя что – то новое? Да – 12 (100%).
2) Полезна ли, по вашему мнению , полученная вами информация? Да – 9 (75%), нет – 3 (25%).
3) Важно ли замечать все тонкости при решении задач? Да – 7 (58%), нет – 5(42%).
4) Понравилось ли вам решать задачи с софизмами? Да – 8(67%), нет – 4(33%)

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение своего выступления я хочу сказать, что, на мой взгляд, софизмы, как в жизни, так и в математике – одно из самых интересных явлений. С их помощью можно доказать любое, даже очевидно неправильное утверждение.

Занимаясь данной научно – исследовательской работой, я смогла на практике рассмотреть влияние софизмов на ход решения задачи. В результате проведенной мной работы я смогла не только расширить свои математические знания, но и помочь другим ребятам более глубоко проникнуть в смысл решаемых задач.

Поработав над разнообразными софизмами, я пришла к выводу о том, что в настоящий момент нет их четкой классификации, и для собственного удобства решила систематизировать их. Для этого я выбрала классификацию по типу допускаемых ошибок. Это сделает данную тему более удобной для восприятия.

После выступления в своей школе я провела повторное анкетирование. Его результаты показали, что большинству учеников было интересно работать с предложенными мной задачами. У многих из них улучшились успехи в решении логических задач. Они научились мыслить нестандартно. Почти всем это понравилось. Некоторые даже начали самостоятельно решать задачи с софизмами, считая, что это будет им полезно, а значит, мои труды не напрасны, и данная работа имеет определенный смысл.

Вывод: Софизмы – скрытые, часто совсем не заметные ошибки в решении. В некоторых случаях найти их бывает особенно проблематично. В этом случае мы рискуем прийти к неверному результату. Чтобы избежать этого, нужно обращать внимание на все возможные уловки. Моя работа поможет с этим разобраться.

Мне было очень интересно заниматься данным исследованием. Я еще раз убедилась в том, что в познании любой области науки нет предела, всегда нужно совершенствоваться и обращать внимание даже на те моменты, которые могут казаться незначительными. В итоге мне удалось не только расширить свой кругозор и научиться логически мыслить, но и помочь в этом своим товарищам.

Цели и задачи работы полностью достигнуты.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

Учебники и учебные пособия:

1. Алгебра и начала анализа: учебник / под ред. А.Н. Колмогорова, А. М. Абрамова, Ю.П. Дудницына, Б.М. Ивлева, С. И. Шварцбурда. – М.:ПРОСВЕЩЕНИЕ, 2013. – 84с.
2. Внеклассная работа по математике в 8 – летней школе/ под ред. М.Б. Гельфанд, Б.С. Павлович – М.:ПРОСВЕЩЕНИЕ, 1954. –
3. Тысяча и один пример Назаренко А.М., Назаренко Л.Д. : учеб.пособие. - Сумы: СЛОБОЖАНЩИНА, 1994. – 238с.
4. Сборник задач по математике для конкурсных экзаменов во ВТУЗы/ по ред. М. И. Сканави – М.: ВЫСШАЯ ШКОЛА, 1972

Интернет ресурсы:

1. Гомонов С. А. О парадоксах, софизмах и других неприятностях в математической науке / С. А. Гомонов // – 2016. – № 17 – с. 121 – 126. [Электронныйресурс] URL: http:// elibrary.ru/guery_results.asp
2. А.В. Бобров, Л.А. Горовенко.Методы поиска ошибок в математических рассуждениях / БобровА. В., Горовенко Л. А. // Международный студенческий вестник. – 2017 – № 4 – 7 – с. 1000 – 1002 [Электронныйресурс] URL: http:// elibrary.ru/guery_results.asp
3. Маврина Р.П., Д.В. Милушева – Бойкина. Обогащение мышления учащихся при обучении математике / Р.П. Маврина, Д.В. Милушева – Бойкина// Дидактика математики. Проблемы и исследования. – 2009 – №32 – с. 38 - 40[Электронныйресурс] URL: http:// elibrary.ru/guery_results.asp
4. Кучковский П.В. Софистика – парадоксальная дочь диалектики / П. В. Кучковский// Научные исследования: от теории к практике. – 2015 –№ 5(6) – с. 319 – 324 [Электронныйресурс] URL: http:// elibrary.ru/guery_results.asp?pagenum =1
5. Кузнецова Т.И., Казаков Н. А. Алгебраические софизмы как средство воспитания у учащихся математической культуры / Кузнецова Т.И., Н. А.Казаков // Continuum. Математика. Информатика. Образование. – 2019 – № 3(15) – с. 56 – 62324 [Электронныйресурс] URL: http:// elibrary.ru/guery_results.asp?pagenum =2

6. П.В. Кучковский. Роль парадоксов в научном познании / Кучковский П. В. // Динамика систем, механизмов и машин. – 2014 – № 5 – с. 174 – 177 [Электронныйресурс] URL: http:// elibrary.ru/guery_results.asp?pagenum =2
7. Н. И. Данилова, И. А. Ильина, Д. К. Покидов. Современные софизмы как инструменты PR – деятельности / Данилова Н. И. , Ильина И. А., Покидов Д. К. // Российская школа связей с общественностью. – 2019 – №13 – с. 70 – 83 [Электронный ресурс] URL: http:// elibrary.ru/gueryresults.asp?pagenum =6
8. В.Д. Мазуров. Логические парадоксы и их роль в математическом моделировании / Мазуров В. Д. // Вестник Южно – Уральского государственного университета. Серия: Компьютерные технологии управления, радиоэлектроники – Т. 16 – № 2 – с. 15 – 23 83 [Электронныйресурс] URL: http:// elibrary.ru/guery_results.asp?pagenum =1
9. Бондаренко Т. Е. , Малакеева Н. В. Тождественные преобразования – угроза равносильности уравнений / Т. Е. Бондаренко, Н. В. Малакеева // Актуальные направления научных исследований XXIвека: теория и практика. – т. 3 №5 ч.1 – 2015 – с. 315 – 320 [Электронныйресурс] URL:vestnik.astu/org/ru/nauka/artikle
10. [Электронныйресурс]URL:https//ru.Wikipedia.org>wiki>Эшер

8) Бочков А. Парадоксы и софизмы / А. Бочков //– г.Апатиты.

9) «Софизмы и парадоксы в математике» Лимонов Д. , г. Кирсанов.


Практические рекомендации в нахождении софизмов при решении уравнений.


Софисты.